Lösungen Prüfung

1. a) g ist symmetrisch, weil Skalarmultiplikation kommutativ ist. g ist strikt positiv, weil der Integrand positiv ist. Bilinearitaet folgt aus Linearitaet des Integrals.

b) Einfaches Integrieren gibt sofort fuer die Basis $\mathcal{B}_{a,b,c}$, dass

$$g_{a,b,c} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{4} + \frac{2}{3}ab + \frac{b^2}{2} & \frac{ac}{3} + \frac{bc}{2} \\ \frac{ac}{3} + \frac{bc}{2} & \frac{c^2}{2} \end{pmatrix}$$

und somit fuer $\mathcal{E}$,

$$g_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

c) Die reziproke Basis von $\mathcal{E}$ ist gegeben durch die Spalten (Zeilen bei Symmetrie) der Inversen von $g_{\mathcal{E}}$. Die Determinante ist $\frac{1}{72}$, und damit (mit der Umkehrformel fuer 2×2-Matrizen),

$$\tilde{g}_{\mathcal{E}} = 72 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Also $\mathcal{E}^g = \{6(3-4x), 6(-4+6x)\}$.

d) $\mathcal{E}$ zu normalisieren, beudeutet richtige a und c zu finden, so dass

$$g_{a,0,c} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{4} & \frac{ac}{3} \\ \frac{ac}{3} & \frac{c^2}{2} \end{pmatrix}$$

orthogonal ist. Orthogonale Matrizen im $\mathbb{R}^2$ sind Drehungen und einer Reflexion und eindeutig parametrisiert durch $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$. Wegen Symmetrie haetten wir eine Relfexion, also muesste auch $\frac{a^2}{4} = -\frac{c^2}{2}$, und damit $c = a = 0$ was nicht erlaubt ist.

e) $v = x+1$ hat kontravariante Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Formel zum Wechsel von kontra- nach kovariant ist gegeben durch $v_j = v^i g_{ij}$, also $[v]_{\mathcal{E}^g} = g[v]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$. Die Norm zum Quadrat ist

$$g(v,v) = \frac{17}{12}.$$

f) Wir haben die Basis $\{b_1, b_2\} = \{2x+1, 1\}$ mit Dualbasis $\{\beta^1, \beta^2\}$ gegeben, dann ist fuer $w \in V$, $\alpha(w) = \alpha(w^i b_i) = \int_0^1 dx(2w^1 x + (w^1 + w^2)) = 2w^1 + w^2 = 2\beta^1(w) + \beta^2(w)$. Also $\alpha = 2\beta^1 + \beta^2$.

2. **a)** Mit Gauss'schem Algorithmus bekommen wir $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 6 & -8 & 3 \end{pmatrix}$.

Damit

$$[x]_2 = S^{-1}[x]_1 = (-1, -1, 1), [x]_3 = T^{-1}[x]_2 = (0, -2, 5)$$
$$[y]_1 = S[y]_2 = (2, 0, 0), [y]_3 = T^{-1}[y]_2 = (2, -4, 12)$$
$$[z]_2 = T[z]_3 = (-4, -6, -8), [z]_2 = S[z]_2 = -(40, 22, 8)$$

b)

v	$(1,0)$
α	$(0,1)$
β	$(0,1)$
A	$(1,1)$
B	$(0,2)$
C	$(2,0)$
D	$(0,1)$

Bezeichne mit L den Basiswechsel von einer Basis $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$ und mit Λ die Inverse.

$\tilde{v}^j = \Lambda^j_i v^i$	$(1,0)$
$\tilde{\alpha}_i = L^j_i \alpha_j$	$(0,1)$
$\tilde{\beta}_i = L^j_i \beta_j$	$(0,1)$
$\tilde{A}^j_k = \Lambda^j_i L^l_k A^i_l$	$(1,1)$
$\tilde{B}_{ij} = L^k_i L^l_j B_{kl}$	$(0,2)$
$\tilde{C}^{ij} = \Lambda^i_k \Lambda^j_l C^{kl}$	$(2,0)$
$\tilde{D}_j = L^i_j D_i$	$(0,1)$

c) Bezueglich der ersten Basis ist $B = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \end{pmatrix}$ und $D = (1, 0, 0)$ (da $\beta(x) = 1$). In der zweiten Basis bekommen wir mit b), dass $\tilde{D} = (1, 2, 3)$ und $\tilde{B} = S^T B S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ 2 & 4 & \\ 3 & 6 & \end{pmatrix}$

3. **a)** Durch Ablesen

$$\begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{4} & \sin\frac{2\pi}{4} & \sin\frac{3\pi}{4} \\ \sin\frac{2\pi}{4} & \sin\frac{4\pi}{4} & \sin\frac{6\pi}{4} \\ \sin\frac{3\pi}{4} & \sin\frac{6\pi}{4} & \sin\frac{9\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

b) Symmetrisch. Eigenwerte finden gibt $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ mit Eigenvektoren $(-1, \sqrt{2}, 1), (1, 0, 1), (1, \sqrt{2}, -1)$. Diese sind zu normalisieren.

4. **a)** Da die Hoehe vernachlaessigbar ist, koennen wir $z = 0$ setzen in der Berechnung von I und betrachten nur die Ebene (x, y) Ist S im Mittelpunkt der Scheibe, verwenen wir Polarkoordinaten (r, φ), $r \in [0, \varrho]$ und $\varphi \in [0, \pi)$. Es ist $I_{22} = \int (x^2 + z^2) dm = \frac{M}{\frac{\pi}{2}\varrho^2} \frac{\varrho^4}{4} \int_0^\pi \sin\varphi^2 d\varphi$. Da $\int_0^\pi \sin^2\varphi = \int_0^\pi \cos^2\varphi$, ist $\int_0^\pi \sin^2\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1 = \frac{\pi}{2}$ und wir finden

$$I_{22} = \frac{\varrho^2 M}{4}.$$

See next page!

Weiter $I_{11} = \int (y^2 + z^2) dm$ und wir bekommen analog $I_{11} = \frac{\varrho^2 M}{4}$. Fuer die offdiagonalen ist nur notwendig I_{12} zu berechnen.

$$I_{12} = -\int xydm = -\frac{\varrho^2 M}{\pi 4} \int_0^\pi \sin\varphi \cos\varphi = 0.$$

b) Wenn (u, v) die neuen Koordinaten beschreiben, koennen wir die verschobenen Polarkoordinaten verwenden, $(u, v) = (-\varrho + x, y) = (-\varrho + r\cos\varphi, r\cos\varphi)$. Wir haben

$$\int u^2 dm = \int x^2 dm - 2\varrho \int xdm + \varrho^2 \int dm$$

$$\int uvdm = -\int xydm + \varrho \int ydm$$

$$\int v^2 dm = \int y^2 dm$$

Die neuen Terme erfuellen $\varrho \int xdm = 0$ da $\int_0^\pi \cos\varphi = 0$ und $\varrho \int ydm = 2\varrho \frac{M}{\frac{\pi}{2}\varrho^2} \frac{\varrho^3}{3} = \frac{4M}{3\pi}\varrho^2$ da $\int_0^\pi \sin\varphi = 2$. Damit

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\varrho^2 M}{4} & \frac{4\varrho^2 M}{3\pi} \\ \frac{4\varrho^2 M}{3\pi} & \frac{\varrho^2 M}{4} + \varrho^2 M \end{pmatrix}.$$

c) Aus Symmetriegruenden erwarten wir, dass der neue Traegheitstensor K die Form von I hat, also keine offdiagonalen Eintraege besitzt. Tatsaechlich liest sich aus oberen Gleichung ab, dass der neue Offdiagonalterm die Form $\int xdm$ hat, und der aber wie gezeigt, verschwindet.