ETH Zürich, D-MATL
Multilineare Algebra
Sommer 2010
Prof. Ö. Imamoglu

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

—- • —-

1. [10 Punkte] Es seien folgende Basistransformationen gegeben:

$$b'_i = L_i^j b_j \qquad\qquad b''_i = U_i^j b'_i$$

Wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad\qquad U = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vervollständige folgende Tabelle:

x^1	x^2	x^3	x'^1	x'^2	x'^3	x''^1	x''^2	x''^3
1	1	1						
			5	1	-1			
						1	0	0

2. [12 Punkte] Die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ sei wie folgt gegeben:

$$\mathcal{F}(p(x)) := \frac{12}{x} \int_0^x p(y)dy$$

Sei $q(x) := 1 + x + x^2 + x^3$.

a) Sei folgende Basis $\mathcal{B}$ gegeben: $b_1 = 1$, $b_2 = x$, $b_3 = x^2$, $b_4 = x^3$. Bestimme den Koordinatenvektor von $q(x)$ und die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}$ (bezeichnet mit $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$).

b) Sei folgende Basis $\mathcal{B}'$ gegeben: $b'_1 = 1$, $b'_2 = 1 + x$, $b'_3 = 1 + x + x^2$, $b'_4 = 1 + x + x^2 + x^3$. Bestimme den Koordinatenvektor von $q(x)$ und die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}'$ (bezeichnet mit $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'}$).

c) Was ist der Zusammenhang zwischen $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$ und $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'}$? Schreibe dies auch in Einstein-Summenkonvention. Was für ein Typ Tensor ist $\mathcal{F}$ demnach?

d) Bestimme die Eigenwerte von $\mathcal{F}$ und bestimme eine Eigenbasis für $\mathcal{F}$ (in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$).

Bitte wenden!

3. [11 Punkte] Sei $\{e_j\}$ die Standardbasis. Sei $\vec{x} = x^i e_i, \vec{y} = y^j e_j \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit den Matrixeinträgen A^i_j.

a) Schreibe die Koordinaten folgender Ausdrücke in der Einstein-Summenkonvention (ohne Summenzeichen) auf und vereinfache diese soweit möglich:

$$A\vec{x} \qquad \frac{\partial}{\partial x^k}(A\vec{x}) \qquad A^4 \qquad \vec{x} \times \vec{y} \text{ (mit n=3)} \qquad < \vec{x}, \vec{y} >$$

b) Wie verhält sich ein Tensor T vom Typ $(0,2)$, $(2,1)$ und $(3,2)$ jeweils unter Basiswechsel (ausgedrückt in der Einstein-Summenkonvention)?

c) Eine Grösse T^{ij}_k und folgende Basistransformation seien gegeben: $b'_i = L^j_i b_j$ (und sei $\Lambda = L^{-1}$). T^{ij}_k erfüllt folgende Transformationseigenschaften:

$$\Lambda^k_s T^{ij\prime}_k = \Lambda^j_r T^{qr}_s \Lambda^i_q$$

Zeige, dass es sich bei T^{ij}_k um einen Tensor handelt und bestimme dessen Typ.

4. [11 Punkte] Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem folgenden Skalarprodukt:

$$g : V \times V \to \mathbb{R} \qquad (u,v) \mapsto g(u,v) := u^T A v, \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis und sei $\mathcal{B}' = \left\{ b_1{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2{}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3{}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Bestimme die Koordinaten g_{ij} und g'_{ij} von g bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$. Was ist der Zusammenhang zwischen g_{ij} und g'_{ij} (in der Einstein-Summenkonvention). Um was für einen Typ Tensor handelt es sich bei g?

b) Berechne die duale Basis von $\mathcal{B}$ bezüglich g.

c) Sei $\vec{x} = x^i b_i$ ein Vektor mit den kontravarianten Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{B}$. Berechne die kovarianten Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich $\mathcal{B}$. Bestimme auch die kontravarianten Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich $\mathcal{B}'$. *Hinweis: Siehe auch L aus Aufgabe 1.*

Viel Erfolg!