ETH Zürich, D-MATL
Multilineare Algebra
Sommer 2011

Prof. Ö. Imamoglu

Wichtige Hinweise:

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Begründe jeweils deine Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

—- • —-

1. [10 Punkte] Sei $V = \mathbb{R}^N$ (mit $N > 1$) und sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis. Gegeben sei folgende Abbildung $\mathcal{F} : V \to V$ (die diskrete Cosinustransformation):

$$x \mapsto X = \mathcal{F}(x), \text{ wobei } X^{k+1} := \sum_{m=0}^{N-1} x^{m+1} \cos\left(\frac{\pi}{N-1} mk\right), \ k = 0, \dots, N-1$$

a) Zeige, dass $\mathcal{F}$ linear ist. Sei von nun an $N = 3$. Bestimme die Darstellungsmatrix A von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}$. Ist $\mathcal{F}$ invertierbar? Sei $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$. Bestimme $\mathcal{F}(v)$.

b) Sei $\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tilde{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Berechne die Transformationsmatrix L von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$. Sei $\tilde{A}$ die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$. Was ist der allgemeine Zusammenhang zwischen A und $\tilde{A}$ in der Einstein-Summenkonvention? Um was für einen Typ Tensor handelt es sich bei $\mathcal{F}$? Bestimme auch den kontravarianten Koordinatenvektor von v bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

c) Überprüfe, dass in diesem Falle $A = \tilde{A}$ gilt.

d) Bestimme einen Eigenwert von $\mathcal{F}$.

2. [10 Punkte] Sei $V = \mathbb{R}^n$. Sei $g(x,y) := x^\top A y$ (mit $A \in M_n(\mathbb{R})$) ein *Skalarprodukt* und sei $\mathcal{F}(x) := Bx$ (mit $B \in M_n(\mathbb{R})$) eine *lineare Abbildung*. Seien $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ zwei Basen mit Transformationsmatrix L (von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$). Sei $\Lambda = L^{-1}$.

a) Es bezeichne G^i_j (resp. $\tilde{G}^i_j$) den (i,j)-ten Eintrag der *Matrix* des metrischen Tensors zu g bezüglich Basis $\mathcal{B}$ (resp. $\tilde{\mathcal{B}}$). Analog sei H^i_j (resp. $\tilde{H}$) der (i,j)-te Eintrag der *Darstellungsmatrix* von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}$ (resp. $\tilde{\mathcal{B}}$).

Welche der folgenden Aussagen sind wohldefiniert und treffen zu (ohne Beweis)?

(1) $$\tilde{G}^i_j = \sum_{k,l=1}^n \Lambda^i_k L^l_j G^k_l$$

(2) $$L^m_i \tilde{H}^i_j = L^l_j H^m_l$$

(3) $$\tilde{G}^a_b = L^e_a L^f_b G^e_f$$

(4) $$\tilde{H}^a_b = \sum_{e,f=1}^n L^e_a L^f_b H^e_f$$

(5) $$\tilde{G}^i_j = \sum_{k,l=1}^n L^k_i L^l_j G^k_l$$

(6) $$\tilde{G}^i_j = L^r_s \delta^{is} \delta_{kr} L^l_j G^k_l$$

b) Schreibe folgende Ausdrücke (resp. deren Koordinaten) in der Einstein-Summenkonvention (ohne Summenzeichen) auf und vereinfache diese soweit möglich.

$$B^\top A \qquad \operatorname{tr}(B) \qquad g(x,y) \qquad \mathcal{F}(x) \qquad g(\mathcal{F}(x), x)$$

c) Wie verhält sich ein Tensor T vom Typ $(1,1)$, $(0,4)$, $(3,1)$ und $(2,3)$ jeweils unter Basiswechsel (ausgedrückt in der Einstein-Summenkonvention)?

d) Welche der folgenden indizierten Grössen Q, R, S, T besitzen das Transformationsverhalten eines Tensors? Bestimme gegebenenfalls den Typ des Tensors.

$$\tilde{Q}_{ijkl} = L^b_j L^c_k L^d_l Q_{ibcd} \qquad \tilde{R}^i_{jk} = \delta^a_d \Lambda^i_a L^b_j L^c_k R^d_{bc} \qquad S^{ij}_{kl} = \Lambda^i_a \Lambda^j_b L^a_k L^b_l \tilde{S}^{kl}_{ij} \qquad \Lambda^j_e \Lambda^k_f \tilde{T}^i_{jk} = \Lambda^i_a T^a_{ef}$$

3. [10 Punkte] Sei $V = M_2(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen mit Skalarprodukt $g(A,B) := \operatorname{tr}(A^\top B)$. Gegeben seien folgende Basen von V:

$$\mathcal{B} := \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Bestimme die Koordinaten g_{ij} von g bezüglich $\mathcal{B}$.

b) Bestimme die reziproke Basis von $\mathcal{B}$ bezüglich g.

c) $A \in V$ sei durch folgenden kontravarianten Koordinatenvektor bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$. Bestimme A und den kovarianten Koordinatenvektoren von A bezüglich $\mathcal{B}$.

4. [12 Punkte] Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\mathcal{B}$. Gegeben sei ein Material mit einem zugehörigen Tensor T vom Typ $(0,2)$, welcher gewisse Materialeigenschaften beschreibt (z.B. der Trägheitstensor). Die entsprechenden Materialeigenschaften bleiben erhalten unter folgenden Transformationen:

(E) Der Ebenenspiegelung $\mathcal{F}_E$ an der Ebene $E : x^1 + x^2 = 0$

(R) Der Rotationen $\mathcal{F}_R$ um 90 Grad (im Gegenuhrzeigersinn) um die Gerade $G = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Dabei seien x^1, x^2, x^3 die Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$. Gegeben sei nun folgende Orthonormalbasis:

$$\tilde{\mathcal{B}} := \left\{ \tilde{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \tilde{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \tilde{b}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Und sei $\mathcal{B}_E := \mathcal{F}_E(\tilde{\mathcal{B}}) = \left\{\mathcal{F}_E(\tilde{b}_1),\ \mathcal{F}_E(\tilde{b}_2),\ \mathcal{F}_E(\tilde{b}_3)\right\}, \mathcal{B}_R := \mathcal{F}_R(\tilde{\mathcal{B}}) = \left\{\mathcal{F}_R(\tilde{b}_1),\ \mathcal{F}_R(\tilde{b}_2),\ \mathcal{F}_R(\tilde{b}_3)\right\}$.

a) Bestimme die Transformationsmatrix L_E von der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ zur Basis $\mathcal{B}_E$ und die Transformationsmatrix L_R von der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ zur Basis $\mathcal{B}_R$. *Hinweis: Skizze!*

b) Es seien $\tilde{T}_{ij}$ die Koordinaten von T bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$. Wie bereits erwähnt bleiben diese Koordinaten also vollständig invariant unter den obigen beiden Basistransformationen, d.h. $\tilde{T}_{ij} = L^a_i L^b_j \tilde{T}_{ab}$ für $L = L_E$ resp. $L = L_R$. Zeige, dass dies bei $L = L_E$ für $\tilde{T}_{ij}$ folgendes impliziert:

$$\tilde{T}_{12} = \tilde{T}_{13} = \tilde{T}_{21} = \tilde{T}_{31} = 0$$

und bei $L = L_R$ folgendes:

$$\tilde{T}_{23} = -\tilde{T}_{32}$$
$$\tilde{T}_{22} = \tilde{T}_{33}$$

c) Sei $\tilde{S} = \begin{pmatrix}\tilde{T}_{11}\\\tilde{T}_{22}\\\tilde{T}_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ bereits gegeben. Berechne daraus alle Einträge von $\tilde{T}_{ij}$. Sei nun $\mathcal{B}$ die Standardbasis und seien T_{ij} die Koordinaten von T bezüglich $\mathcal{B}$. Bestimme die Transformationsmatrix Λ von $\tilde{\mathcal{B}}$ nach $\mathcal{B}$ und berechne alle Einträge von T_{ij}.

d) Bestimme $S = \begin{pmatrix}T_{11}\\T_{22}\\T_{23}\end{pmatrix}$ (bezüglich $\mathcal{B}$). Handelt es sich bei S und $\tilde{S}$ um Koordinaten von einem Tensor? Bestimme gegebenenfalls dessen Typ.