ETH Zürich, D-MATL
Multilineare Algebra
Sommer 2012
Dr. Ana Cannas

Wichtige Hinweise:

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Begründe jeweils deine Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

—- • —-

1. [30 Punkte] Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ mit Basis $\mathcal{B} = (b_1 = 1,\ b_2 = x,\ b_3 = x^2)$. Gegeben seien folgende zwei Linearformen:

$$\begin{aligned} \alpha : & V \to \mathbb{R} \\ & p \mapsto \alpha(p) := p(0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta : & V \to \mathbb{R} \\ & p \mapsto \beta(p) := \int_0^1 p(x)\,dx \end{aligned}$$

und folgende lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi : & V \to V \\ & p \mapsto \varphi(p) := \alpha(p) + 6x^2\beta(p) \end{aligned}$$

a) Bestimme die Darstellungsmatrix A von φ bezüglich $\mathcal{B}$.

b) Bestimme die Koeffizienten c_{ij} von $\alpha \otimes \beta \in V^* \otimes V^*$ bezüglich der Basis $(\beta^i \otimes \beta^j)_{i,j=1,2,3}$ von $V^* \otimes V^*$, wobei $\mathcal{B}^* = (\beta^1, \beta^2, \beta^3)$ die Dualbasis von $\mathcal{B}$ ist.

c) Was ist der Typ von Tensor φ und von $\alpha \otimes \beta$? Beschreibe das Transformationsverhalten von A^i_j und von c_{ij} unter einem Basiswechsel in der Einstein-Summenkonvention (es sei L die Matrix des Basiswechsel zu einer neuen Basis $\widetilde{\mathcal{B}}$, $\Lambda = L^{-1}$ und $\tilde{A}^i_j$ resp. $\tilde{c}_{ij}$ seien die Koeffizienten bezüglich dieser neuen Basis).

d) Schreibe $\operatorname{tr}(\Lambda A L)$ in der Einstein-Summenkonvention und vereinfache soweit möglich.
Gilt $\operatorname{tr}\left(\tilde{A}^i_j\right) = \operatorname{tr}(A^i_j)$?
Begründe deine Antwort (gib ein Gegenbeispiel an, falls die Aussage nicht zutrifft).

e) Gilt $\operatorname{tr}(\tilde{c}_{ij}) = \operatorname{tr}(c_{ij})$?
Begründe deine Antwort (gib ein Gegenbeispiel an, falls die Aussage nicht zutrifft).

f) Bestimme die Eigenwerte und eine Eigenbasis (in $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$) von φ.

2. [30 Punkte] Sei $V = \mathbb{R}^3$ und sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis. Gegeben sei folgendes (nicht Standard!) Skalarprodukt:

$$g : V \times V \to \mathbb{R} \qquad (u,v) \mapsto g(u,v) := g_{ij}u^i v^j, \qquad \text{wobei } (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sei nun

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left(\widetilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \widetilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \widetilde{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

eine zweite Basis von V.

a) Bestimme die Matrix L des Basiswechsels von $\mathcal{B}$ nach $\widetilde{\mathcal{B}}$.

b) Bestimme die Koordinaten $\widetilde{g}_{ij}$ von g bezüglich der Basis $\widetilde{\mathcal{B}}$.

c) Beschreibe den Zusammenhang zwischen g_{ij} und $\widetilde{g}_{ij}$ in der Einstein-Summenkonvention. Ist $\mathcal{B}$ resp. $\widetilde{\mathcal{B}}$ eine Orthonormalbasis bezüglich g?

d) Bestimme die reziproke Basis von $\mathcal{B}$ und die reziproke Basis von $\widetilde{\mathcal{B}}$ bezüglich g.

e) Gegeben sei ein Vektor $v \in V$ mit den kontravariantem Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{B}$. Berechne die kovarianten Koordinaten v_j von v bezüglich $\mathcal{B}$.

f) Berechne die kontravarianten Koordinaten $\widetilde{v}^i$ von v bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$.

3. [20 Punkte] Sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ eine Orthonormalbasis von $V = \mathbb{R}^3$. Gegeben sei ein Material unter Spannung. Der Verzerrungstensor ε sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Hauptkoeffizienten von ε.

b) Bestimme eine Orthonormalbasis von $V = \mathbb{R}^3$ bezüglich derer ε durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

c) Schreibe den Verzerrungstensor ε als Summe einer Scherungsdeformation ε^S und einer gleichmässigen Kompression ε^K.

d) Der Elastizitätstensor E des Materials sei bezüglich $\mathcal{B}$ wie folgt gegeben:

$$E^{ijkl} = i + j + k + l - 4$$

Bestimme den Spannungstensor σ bezüglich $\mathcal{B}$ ($\sigma^{ij} = E^{ijkl}\varepsilon_{kl}$).

4. [20 Punkte] Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\mathcal{B} = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Sei

$$T : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$$

eine *symmetrische* Multilinearform, die eine gewisse Materialeigenschaft beschreibt.

a) Wie viele unabhängige Koordinaten T_{ijkl} besitzt eine symmetrische Multilinearform wie oben im allgemeinen? Was für ein Typ Tensor ist T? Gib auch dessen Transformationsverhalten unter Basiswechsel an (wobei L die Matrix des Basiswechsel zu einer neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ sei).

b) Das Material besitze nun gewisse Symmetrien. Die von T beschriebene Materialeigenschaft bleibt erhalten unter der Spiegelung $\mathcal{S}$ an der Gerade $x^1 = 0$:

$$\left(x^1, x^2\right) \mapsto \left(-x^1, x^2\right)$$

Bestimme die Darstellungsmatrix M dieser Spiegelung bezüglich $\mathcal{B}$ und zeige, dass dann gilt:

$$T_{1222} = 0 \text{ und } T_{1112} = 0$$

c) Wir nehmen nun an, dass

$$T(e_1, e_1, e_1, e_1) = 3\,, \qquad T(e_2, e_2, e_2, e_2) = 4\,, \qquad T(e_1, e_1, e_2, e_2) = 5\,,$$

Bestimme

$$T(e_1, e_2, e_1 + e_2, 7e_1 - e_2)$$

d) Gegeben sei folgender $(2,0)$-Tensor:

$$U : V^* \times V^* \to \mathbb{R} \qquad (\alpha, \gamma) \mapsto U(\alpha, \gamma) := T(e_1, e_2, \alpha(e_1)e_1, \gamma(e_2)e_2)$$

Das heisst $U = U^{ij} b_i \otimes b_j$. Bestimme die Koordinaten von U, also $U^{ij} = U(\beta^i, \beta^j)$, wobei $\mathcal{B}^* = (\beta^1,\ \beta^2)$ die Dualbasis (auf V^*) von $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2)$ ist.