**1. [30 Punkte]**

Sei $V$ der Unterraum der Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aufgespannt von

$$b_1 : t \mapsto e^t, \quad b_2 : t \mapsto e^{2t}, \quad b_3 : t \mapsto e^{3t}.$$

Sei $\tilde{\beta}^1, \tilde{\beta}^2, \tilde{\beta}^3 \in V^*$,

$$\tilde{\beta}^1 : f(t) \mapsto f(0), \quad \tilde{\beta}^2 : f(t) \mapsto f'(0), \quad \tilde{\beta}^3 : f(t) \mapsto f''(0).$$

Sei $v = e^t + e^{2t} + e^{3t} \in V$, und gegeben sei folgende lineare Abbildung:

$$\mathcal{F} : V \to V, \quad \mathcal{F} : f(t) \mapsto f'(t).$$

**a)** Zeige, dass $\tilde{\mathcal{B}}^* = \{\tilde{\beta}^1, \tilde{\beta}^2, \tilde{\beta}^3\}$ eine Basis von $V^*$ ist.

Sei $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ die Dualbasis von $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ auf $V^*$, und sei $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3\}$ die Dualbasis von $\tilde{\mathcal{B}}^*$ auf $V$.

**b)** Bestimme die Koordinaten von $\beta^1$, $\beta^2$, $\beta^3$ bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}}^*$.

**c)** Berechne die Koordinaten von $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$, $\tilde{b}_3$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Berechne die Transformationsmatrix $L$ von der Basis $\mathcal{B}$ in die Basis $\tilde{\mathcal{B}}$.

**d)** Berechne die kontravarianten Koordinaten von $v$ bezüglich $\mathcal{B}$, und auch bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

**e)** Berechne die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}$, und auch bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

**f)** Finde die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathcal{F}$.

**2. [20 Punkte]**

**a)** Sei $U$ einer Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Sei $h : U \times U \to U$ eine bilineare Abbildung, und sei $\beta \in U^*$. Sei $g : U \times U \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \beta(h(u, v))$. Bestimme den Typ der Tensoren $u$, $\beta$, $g$, $h$. Ausdrücke, nutzend Einstein-Summenkonvention, die Koordinaten von $g$ (bezüglich $\mathcal{B}$) durch die Koordinaten von $\beta$, $h$ (bezüglich $\mathcal{B}$).

**b)** Wie verhält sich ein Tensor $T$ vom Typ $(0, 2)$, $(4, 0)$, $(1, 2)$ und $(2, 2)$ jeweils unter Basiswechsel (ausgedrückt in der Einstein-Summenkonvention)?

**c)** Welche der folgenden indizierten Grössen $Q$, $R$, $S$, $T$ besitzen das Transformationsverhalten eines Tensors? Bestimme gegebenenfalls den Typ des Tensors.

$$\tilde{Q}^{ijk} = \Lambda^i_l \Lambda^j_m \Lambda^k_n Q^{lmn}, \quad \tilde{R}^i_{jk} = \Lambda^l_i L^j_m L^k_n R^l_{mn}, \quad \tilde{S}^i_{jk} = \Lambda^i_l L^m_k S^l_{jm}, \quad \tilde{T}^i_j = \delta^l_a \Lambda^i_k L^a_j T^k_l.$$

**d)** Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis. Bestimme die Dimension des Vektorraums $\mathcal{R}$ von Typ $(1, 3)$ Tensoren $T^l_{ijk}$ auf $V$. Bestimme die Dimension des Unterraums $\mathcal{S}$ von Tensoren $T^l_{ijk}$ mit der folgenden Symmetrie:

$$T^l_{ijk} = T^l_{jki} \text{ für alle } i, j, k, l \in \{1, 2\}.$$

Jetzt sei $T^l_{ijk} = i + j + k - l$ (wobei $i, j, k, l \in \{1, 2\}$), dann gilt $T \in \mathcal{S}$. Berechne $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

**3. [30 Punkte]** Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem folgenden Skalarprodukt:

$$g\colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto u^\top A v, \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis und sei $\mathcal{B}' = \left\{ b'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- **a)** Bestimme die Matrix $L$ des Basiswechsels von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$. Bestimme die Matrix $\Lambda = L^{-1}$.
- **b)** Bestimme die Koordinaten $g_{ij}$ und $g'_{ij}$ von $g$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.
- **c)** Bestimme die reziproke Basis von $\mathcal{B}$ und die reziproke Basis von $\mathcal{B}'$ bezüglich $g$. Ist $\mathcal{B}$ resp. $\mathcal{B}'$ eine Orthonormalbasis bezüglich $g$?
- **d)** Gegeben sei ein Vektor $v \in V$ mit den kontravariantem Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{B}$. Berechne die kovarianten Koordinaten $v_j$ von $v$ bezüglich $\mathcal{B}$.
- **e)** Berechne die kontravarianten Koordinaten $v'^i$ von $v$ bezüglich $\mathcal{B}'$.

**4. [20 Punkte]** Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Ein starrer Körper dreht mit Winkelgeschwindigkeit $\omega^i = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Der Trägheitstensor von dem Körper ist $I_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

- **a)** Bestimme die kinetische Energie des Körpers.
- **b)** Bestimme die Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente.
- **c)** Gib die Gleichung des Trägheitsellipsoids an.