Prüfung Sommer 2014

1. (**20 Punkte**) Seien für einen 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V die Basen $\mathcal{B}_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathcal{B}_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ und $\mathcal{B}_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$ gegeben. Gegeben seien weiter die Transformationsmatrizen $L_1 = L_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ und $L_2 = L_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_1}$ zum Basiswechsel $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ beziehungsweise von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_3$ wobei

$$L_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben seien die Vektoren v und w mit Koordinatenvektoren in der Basis $\mathcal{B}_1$ respektive $\mathcal{B}_3$,

$$[v]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [w]_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme $L_3 = L_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}$!

b) Bestimme $[v]_{\mathcal{B}_2}$ und $[w]_{\mathcal{B}_2}$!

c) Seien $\mathcal{B}_1^* = \{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3\}$ und $\mathcal{B}_2^* = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ die Dualbasen von $\mathcal{B}_1$ respektive $\mathcal{B}_2$ auf V^*. Bestimme die Koordinaten von β^i bezüglich $\mathcal{B}_1^*$ für $i = 1, 2, 3$!

2. (**30 Punkte**) Sei $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : A = A^*\}$ der Vektorraum der hermitischen Matrizen über $\mathbb{R}$. Hier ist für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ die Matrix A^* definiert durch

$$A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} \end{pmatrix}$$

wobei $\overline{a}$ die in $\mathbb{C}$ konjugierte Zahl zu a ist. Definiere die folgende Bilinearform g

$$g : V \times V \to \mathbb{C} \qquad g(A, B) = \mathrm{Spur}(B^* A).$$

Seien weiter folgende Elemente von V gegeben:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ eine Basis von V bildet.

b) Zeige, dass g ein (reellwertiges!) Skalarprodukt definiert und bestimme die Koordinaten der Darstellungsmatrix g_{ij} von g bezüglich $\mathcal{S}$.

c) Berechne die reziproke Basis von $\mathcal{S}$ bezüglich g.

d) Definiere die Transpositionsabbildung $\psi : V \to V$ durch

$$\psi : A \mapsto A^T.$$

Gebe die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{S}$ an!

Please turn over!

e) Sei eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit Matrixdarstellung bezüglich $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$[\varphi]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gebe Eigenwerte und eine Eigenbasis $\mathcal{T}$ von φ an. Bestimme die Darstellungsmatrix $\tilde{g}_{ij}$ von g bezüglich dieser Basis.

f) Gebe den kovarianten Koordinatenvektor von $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ an.

Bemerkung: Mit Ausnahme von c) und f) können die Teilaufgaben unabhängig voneinander gelöst werden.

3. (**10 Punkte**) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $\mathcal{B}$ und einer weiteren Basis $\widetilde{\mathcal{B}}$. Sei $L = L_{\widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von der Basis $\mathcal{B}$ nach $\widetilde{\mathcal{B}}$ und setze $\Lambda = L^{-1}$. Sei $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, $f : V \to V$ eine lineare Transformation und schliesslich $\alpha : V \to \mathbb{R}$ eine Linearform.

a) Definiere die Tensoren $A : (v, w) \mapsto B(f(v), w)$, $g : v \mapsto \alpha(f(v))$ (für $v, w \in V$) und $T = A \otimes f$. Bestimme den Typ der Tensoren B, f, A, g und T. Schreibe das Transformationsverhalten dieser Tensoren bezüglich des Basiswechsels $\mathcal{B}$ nach $\widetilde{\mathcal{B}}$ in der Einsteinschen Summenkonvention auf.

b) Wir nehmen jetzt an, dass V 2-dimensional ist und betrachten den Unterraum $\mathcal{W}$ der $(2, 2)$-Tensoren $\mathcal{T}_2^2(V)$ mit der Symmetrie $W^{ij}_{kl} = W^{ji}_{lk}$ für alle $W \in \mathcal{W}$. Bestimme die Dimension von $\mathcal{W}$!

4. (**15 Punkte**) Sei W ein idealisierter Stab, beschrieben durch die Dichtefunktion

$$\varrho(x, y, z) = \begin{cases} \frac{m}{l} & \text{falls } (x, y, z) \in [0, l] \times \{0\} \times \{0\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei weiter

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ein Drehvektor durch den Koordinatenursprung.

a) Berechne den Trägheitstensor I_{ij} von W.

b) Gebe den Drehimpulsvektor (*total angular momentum*) L bei Rotation um ω an.

c) Bestimme die kinetische Energie des Körpers bei einer Rotation um ω.

d) Bestimme Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente.

e) Gebe die Gleichung des Trägheitsellipsoiden an.