Prüfung Sommer 2017

1. (8 Punkte)
Gegeben sei die Standardbasis $\mathcal{E} := \{1, x, x^2, x^3\}$ des Vektorraumes $\mathbb{R}[x]_3$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3.
Die lineare Abbildung ψ sei definiert durch

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R}[x]_3 &\to \mathbb{R}[x]_3 \\ p(x) &\mapsto p(x) + xp'(x) + p(0).\end{aligned}$$

Die vier Basisvektoren von $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}$ sind genau die Eigenvektoren der linearen Abbildung ψ.

Finde die vier Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ der linearen Abbildung ψ.

2. (8 Punkte)
Gegeben sei die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\right\}$$

des Vektorraumes $\mathbb{R}[x]_3$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3.
Wir betrachten die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}[x]_3$, welche definiert ist durch

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathbb{R}[x]_3 &\to \mathbb{R}[x]_3 \\ p(x) &\mapsto x \int_0^1 p(t)dt + xp'(x).\end{aligned}$$

Finde die Darstellungsmatrix $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$, welche die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ bezüglich der gegebenen Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}[x]_3$ beschreibt.

3. (10 Punkte)
Sei V ein Vektorraum der Dimension n mit den zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\widetilde{\mathcal{B}}$ und sei $L = L_{\widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von der Basis $\mathcal{B}$ zu $\widetilde{\mathcal{B}}$. Sei weiter wie üblich $\Lambda = L^{-1}_{\widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = L^{-1}$.

Beschreibe in der Einsteinschen Summenkonvention das Transformationsverhalten
eines Tensors T
a.) vom Typ $(1, 0)$ mit Koordinaten T^i bezüglich $\mathcal{B}$ respektive $\widetilde{T}^i$ bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$,
b.) vom Typ $(1, 1)$ mit Koordinaten T^i_j bezüglich $\mathcal{B}$ respektive $\widetilde{T}^i_j$ bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$,
c.) vom Typ $(0, 2)$ mit Koordinaten T_{ij} bezüglich $\mathcal{B}$ respektive $\widetilde{T}_{ij}$ bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Welche der folgenden Ausdrücke machen Sinn in der Einsteinschen Summenkonvention? Begründe **alle** deine Antworten.
d.) $L^{ij}K_{ij} = B^k$,
e.) $L^{ij}B_{jk} = A^i_k$,
f.) $A^i_j B^k = C$.

Welche der folgenden indizierten Grössen Q, R, S, T besitzen das Transformationsverhalten eines Tensors in der Einsteinschen Summenkonvention? Bestimme gegebenenfalls den Typ des Tensors. Begründe **alle** deine Antworten.
g.) $\widetilde{Q}^{ij} = \Lambda^i_k \Lambda^j_l Q^{kl}$,
h.) $\widetilde{R}_{ijk} = L^i_q L^j_r L^k_s R^{qrs}$,
i.) $L^q_i \widetilde{S}^{ij} = \Lambda^j_r S^{qr}$,
j.) $\widetilde{T}^i_j = \Lambda^i_j L^j_k T^k_j$.

4. (8 Punkte)
Gegeben sei die Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\mathcal{B} := \left\{ b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sei g das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, definiert durch die Matrix

$$G = [g]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Das heisst, wir haben

$$g(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^T G [w]_{\mathcal{B}} \text{ für alle } v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Weiter sei der Vektor $v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis

$$\mathcal{E} := \left\{ e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$ gegeben.

Bestimme die kontravarianten und kovarianten Koordinaten des obigen Vektors v bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

5. (8 Punkte)
Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Gegeben sei ein Material unter Spannung. Der Verzerrungstensor ε sei bezüglich der Basis $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$\varepsilon = [\varepsilon_{ij}] := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Hauptkoeffizienten $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ und die drei Hauptverzerrungsrichtungen $v_{\epsilon_1}, v_{\epsilon_2}, v_{\epsilon_3}$ von ε.

6. (8 Punkte)
Gegeben sind die zwei Basen

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

des euklidischen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$.

Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ für den Basiswechsel von der Basis $\mathcal{A}$ zur Basis $\mathcal{B}$.

7. (8 Punkte)
Gegeben seien die drei Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ b_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ b_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$.

Zeige, dass $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ definiert und berechne die Dualbasis

$$\mathcal{B}^* := \left\{\beta^1, \beta^2, \beta^3\right\}$$

von $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^* := \{\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\}$ von $(\mathbb{R}^3)^*$.

8. (8 Punkte)
Gegeben sei die Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\mathcal{E} := \left\{ e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

und ein homogener starrer Körper K der Masse m, welcher die Form eines Quaders mit den Seitenlängen a, b, c hat.
Der Quader K sei bezüglich der obigen Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch die Punktemenge

$$K := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2},\ -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2},\ -\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Es wird angenommen, dass K um eine Achse durch seinen Schwerpunkt $S = O = (0, 0, 0)$ dreht.

Bestimme den Trägheitstensor $I = [I_{ij}]$ des starren Körpers K bezüglich der gegebenen Rotation.