D-MATH Multilineare Algebra FS 2018
Prof. Dr. Özlem Imamoglu

Prüfung Sommer 2018

1. (8 Punkte)
Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ_S als Scherungsdeformation (shear deformation), wenn dessen Spur $\mathrm{spur}(\sigma_S)$ gleich 0 ist. Ausserdem bezeichnen wir einen Spannungstensor σ_P als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.

Weiter sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$\sigma = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Schreibe den obigen Spannungstensor σ als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.

2. (8 Punkte)
Gegeben sei die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{1, 1+2x, 1+2x+3x^2, 1+2x+3x^2+4x^3\right\}$$

des Vektorraumes $\mathbb{R}[x]_3$ der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3.
Wir betrachten die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}[x]_3$, welche definiert ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{R}[x]_3 &\to \mathbb{R}[x]_3 \\ p(x) &\mapsto x^2 \int_0^1 p(t)dt + xp'(x) + p(x). \end{aligned}$$

Finde die Darstellungsmatrix $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$, welche die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ bezüglich der gegebenen Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}[x]_3$ beschreibt.

3. (10 Punkte)
Sei V ein Vektorraum der Dimension n mit den zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\widetilde{\mathcal{B}}$ und sei $L = L_{\widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von der Basis $\mathcal{B}$ zu $\widetilde{\mathcal{B}}$. Sei weiter wie üblich $\Lambda = L^{-1}_{\widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = L^{-1}$.

Beschreibe in der Einsteinschen Summenkonvention das Transformationsverhalten
eines Tensors T
a.) vom Typ $(2,0)$ mit Koordinaten T^{ij} bezüglich $\mathcal{B}$ respektive $\widetilde{T}^{ij}$ bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$,
b.) vom Typ $(1,1)$ mit Koordinaten T^i_j bezüglich $\mathcal{B}$ respektive $\widetilde{T}^i_j$ bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$,
c.) vom Typ $(0,3)$ mit Koordinaten T_{ijk} bezüglich $\mathcal{B}$ respektive $\widetilde{T}_{ijk}$ bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Welche der folgenden Ausdrücke machen Sinn in der Einsteinschen Summenkonvention? Begründe **alle** deine Antworten.
d.) $E^i K_i = B^k$,
e.) $E^{ij} B M_i = A^i_k$,
f.) $\delta^i_i E^{jm} K_{jk} = n A^m_k$.

Schreibe die Koordinaten der folgenden Ausdrücke mittels der Einsteinschen Summenkonvention. Dabei seien

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad y = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Spaltenvektoren und $A = [A^j_i] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B = [B^j_i] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C = [C^j_i] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Matrizen.

g.) $\operatorname{spur}(A \cdot B \cdot C)$, wobei $\cdot$ die Matrixmultiplikation bezeichnet.
h.) $A^3 x$.
i.) $A^2 \cdot B$, wobei $\cdot$ die Matrixmultiplikation bezeichnet.
j.) $C^T x + y$.

4. (8 Punkte)
Gegeben sei die Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\mathcal{B} := \left\{ b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, b_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sei g das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, definiert durch die Matrix

$$G = [g]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Das heisst, wir haben

$$g(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^T G [w]_{\mathcal{B}} \text{ für alle } v, w \in \mathbb{R}^3.$$

Weiter sei der Vektor $v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis

$$\mathcal{E} := \left\{ e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$ gegeben.

Bestimme die kontravarianten und kovarianten Koordinaten des obigen Vektors v bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

5. (8 Punkte)
Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Gegeben sei ein Material unter Spannung. Der Verzerrungstensor ε sei bezüglich der Basis $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$\varepsilon = [\varepsilon_{ij}] := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Hauptkoeffizienten $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ und die drei Hauptverzerrungsrichtungen $v_{\epsilon_1}, v_{\epsilon_2}, v_{\epsilon_3}$ von ε.

6. (8 Punkte)
Gegeben sind die zwei Basen

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

des euklidischen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$.

Bestimme die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ für den Basiswechsel von der Basis $\mathcal{A}$ zur Basis $\mathcal{B}$.

7. (8 Punkte)
Gegeben seien die drei Vektoren

$$b_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ b_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ b_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$.

Zeige, dass $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ definiert und berechne die Dualbasis

$$\mathcal{B}^* := \left\{\beta^1, \beta^2, \beta^3\right\}$$

von $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^* := \{\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\}$ von $(\mathbb{R}^3)^*$.

8. (8 Punkte)
Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Reflexion an der Ebene $\mathcal{P}$ gegeben durch

$$\mathcal{P} : 2x + 3y - z = 0.$$

Finde die Matrixdarstellung $M_T = [T]_{\mathcal{E}}$ von T bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$.

9. (8 Punkte)
Gegeben seien die folgenden zwei Basen von $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

und

$$\tilde{\mathcal{B}} := \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit Matrixdarstellung bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$[\psi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Matrixdarstellung $[\psi]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ von ψ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.