1. **(10 Punkte)**

   Gegeben sind eine ganze Zahl $n > 1$ und die drei $n \times n$ Matrizen $A = (A^{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $B = (B_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ und $C = (C^i_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, wobei i den Reihenindex und j den Spaltenindex bezeichnet.

   Für jede Matrix $M = (M^i_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ bezeichnen wir $(M)^i_j := M^i_j$.

   Ordne jeden Term auf der linken Seite dem gleichwertigen Term auf der rechten Seite zu. **Begründe alle deine Antworten.**

I.	$A^{ip} C^q_p B_{qj}$	a.	$\mathrm{Spur}(C) \cdot (AB)^i_j$
II.	$A^{ip} C^q_q B_{pj}$	b.	$(A^T C^T B)^i_j$
III.	$A^{ip} C^q_j B_{pq}$	c.	$(ABC)^i_j$
IV.	$A^{pi} C^q_p B_{qj}$	d.	$(AC^T B)^i_j$
V.	$A^{pq} C^i_p B_{qj}$	e.	$(CAB)^i_j$

2. **(4 Punkte)** Sei V ein Vektorraum der Dimension n mit den zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ und sei $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$. Sei weiter wie üblich $\Lambda = L^{-1}_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = L^{-1}$.

   Beschreibe in der Einsteinschen Summenkonvention das Transformationsverhalten eines Tensor T vom Typ $(2,1)$ mit Koordinaten T^{ij}_k bez. $\mathcal{B}$ und $\tilde{T}^{ij}_k$ bez. $\tilde{\mathcal{B}}$.

3. **(6 Punkte)**

   Gegeben ist die Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ und das Skalarprodukt mit Matrixdarstellung bezüglich $\mathcal{E}$ gegeben durch

   $$[g]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Bestimme die reziproke Basis $\mathcal{E}^g$ von $\mathcal{E}$ bezüglich g.

4. **(10 Punkte)**

Gegeben sind die Linearformen $\beta^1, \beta^2, \beta^3$ auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}$ der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 2$ definiert durch

$$\begin{aligned} \beta^1(f(x)) &= f(1) \\ \beta^2(f(x)) &= f'(2) \\ \beta^3(f(x)) &= f''(3). \end{aligned}$$

(a) **(5 Punkte)** Zeige, dass sie eine Basis $\mathcal{C} = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ des Dualvektorraums V^* bilden. [*Hinweis:* Bestimme die Komponenten von jedem β^i bezüglich der Basis $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ von V]

(b) **(5 Punkte)** Finde die Basis $\mathcal{B}$ von V, deren Dualbasis gleich $\mathcal{C}$ ist.

5. **(10 Punkte)**

Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ_S als Scherungsdeformation (shear deformation), wenn dessen Spur gleich 0 ist. Ausserdem bezeichnen wir einen Spannungstensor σ_P als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.

Sei $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^3$. Ein Spannungstensor σ sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben

$$A = [\sigma]_{\mathcal{E}} = [\sigma^{ij}] := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) **(3 Punkte)** Schreibe den obigen Spannungstensor σ als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.

(b) **(7 Punkte)** Bestimme die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sowie die ersten drei Spannungsinvarianten I_1, I_2 und I_3 des obigen Spannungstensors σ.

6. **(10 Punkte)**
   Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Reflexion an der Ebene π gegeben durch

$$\pi : 2x + y - z = 0.$$

   Finde die Matrixdarstellung $[\psi]_{\mathcal{E}}$ von ψ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

7. **(10 Punkte)**
   Gegeben sind die Basen $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ und $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$b_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \; b_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Weiter sind der Vektor $v = c_1 + c_2$ und das Standardskalarprodukt g auf $\mathbb{R}^2$ gegeben.

   (a) **(3 Punkte)** Berechne die Dualbasis $\mathcal{B}^*$ von $\mathcal{B}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^*$ von $(\mathbb{R}^2)^*$.

   (b) **(5 Punkte)** Berechne die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{C}$.

   Die Transformationsmatrix von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$ ist durch

$$L_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   gegeben.

   (c) **(2 Punkte)** Sei $w \in \mathbb{R}^2$ der Vektor mit kovarianten Koordinaten bezüglich $\mathcal{C}$ gegeben durch

$$[w]_{\mathcal{C}^g} = [1 \quad -1].$$

   Berechne die kovarianten Koordinaten von w bezüglich $\mathcal{B}$.