D-MATH Multilineare Algebra
Prof. Alessandra Iozzi

Prüfung Winter 2014

1. (**15 Punkte**) Sei $V = \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ der Raum der affinen Funktionen der Form $x \mapsto ax + b$ und betrachte folgende Abbildung:

$$g : V \times V \to \mathbb{R} \qquad (p,q) \mapsto g(x,y) = \int_0^1 xp(x)q(x)dx.$$

Seien weiter $\mathcal{E} = \{1, x\}$ und $\mathcal{B}_{a,b,c} = \{ax + b, c\}$ (wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \neq c$) zwei Basen von V.

a) Verifiziere, dass g ein Skalarprodukt ist!

b) Bestimme die Koordinaten von g bezüglich der Basen $\mathcal{E} = \mathcal{B}_{1,0,1}$ und allgemeiner für $\mathcal{B}_{a,b,c}$!

c) Berechne die reziproke Basis $\mathcal{E}^g$ von $\mathcal{E}$ bezüglich g.

d) Kann die Basis $\mathcal{E}$ so normalisiert werden, dass sie bezüglich g orthogonal ist?

e) Bestimme die kontra- und kovarianten Koordinaten von $x + 1$ bezüglich $\mathcal{E}$. Berechne die Norm von $x + 1$ bezüglich g.

f) Seien nun $a = 2$, $b = 1$ und $c = 1$ und $\alpha : p \mapsto \int_0^1 p(x)dx$. Berechne die Koordinaten von α bezüglich $\mathcal{B}^*_{2,1,1}$.

2. (**15 Punkte**) Seien $\mathcal{B}_1 = \{b_j^1\}$, $\mathcal{B}_2 = \{b_j^2\}$, $\mathcal{B}_3 = \{b_j^3\}$ drei Basen des $\mathbb{R}^3$ mit Basistransformationen S von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ und T von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_3$, also $b_i^2 = S_i^j b_j^1$ und $b_i^3 = T_i^j b_j^2$. Die Basistransformation seien konkret gegeben durch

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seien weiter $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ mit $[x]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, $[y]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $[z]_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T$.

a) Berechne $[x]_{\mathcal{B}_2}$, $[x]_{\mathcal{B}_3}$, $[y]_{\mathcal{B}_1}$, $[y]_{\mathcal{B}_3}$, $[z]_{\mathcal{B}_1}$, $[z]_{\mathcal{B}_2}$.

b) Sei V ein beliebiger Vektorraum, $\alpha, \beta : V \to \mathbb{R}$ zwei Linearformen, $v \in V$ ein Vektorraumelement und $A : V \to V$ eine lineare Abbildung. Definiere $B = \alpha \otimes \beta$, $C = v \otimes A(v)$ und $D = \alpha \otimes \beta(v)$. Bestimme, ob diese Objekte Tensoren definieren und gebe (falls anwendbar) den Tensortyp von $v, \alpha, \beta, A, B, C$ und D an. Beschreibe in der Einsteinschen Summenkonvention das Verhalten dieser Tensoren unter einem Basiswechsel.

c) Wir setzen $V = \mathbb{R}^3$. Bezeichne mit $\{\beta_1^j\}$ die Dualbasis $\mathcal{B}_1^*$ von $\mathcal{B}_1$ und setze $\alpha = \beta_1^1$, $\beta = \beta_1^2$ und $v = x$. Gebe die Darstellungsmatrix von B und die Koordinaten von D (wie definiert in b)) bezüglich $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ an.

3. (**15 Punkte**) Betrachte die folgende lineare Transformation F auf $\mathbb{R}^3$,

$$(F(x))^k = \sum_{l=1}^{3} x^l \sin \frac{\pi k l}{4}$$

a) Bestimme die Darstellungsmatrix A von F bezüglich der Standardbasis. Evaluiere die Sinusterme um die Matrix zu vereinfachen.

b) Warum ist A diagonalisierbar? Bestimme eine Orthonormalbasis bezüglich dem Standardskalarprodukt bestehend aus Eigenvektoren von F! Tipp: $\sqrt{2}$ ist ein Eigenwert.

4. (**15 Punkte**) Betrachte eine halbierte Scheibe mit Radius ϱ, Masse M, vernachlässigbarer Höhe und Drehzentrum S im Mittelpunkt der (ganzen) Scheibe (siehe Skizze). Fixiere ein Koordinatensystem mit Ursprung S.

a) Bestimme den Trägheitstensor I!

b) Verschiebe die Drehachse um $(\varrho, 0)$, so dass sich die Halbscheibe um einer seiner Eckpunkte S' dreht. Bestimme den Trägheitstensor I' bezüglich diesen neuen Drehpunktes.

c) Betrachte schliesslich den neuen Drehpunkt S'' durch Verschiebung um $(0, \varrho)$. Welche Gestalt hat der Trägheitstensor jetzt?

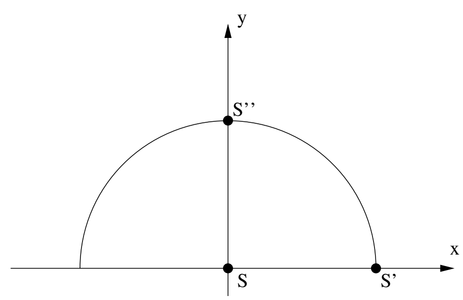

Abbildung 1: Aufgabe 4