

Lineare Algebra II

Bonusaufgabe A

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

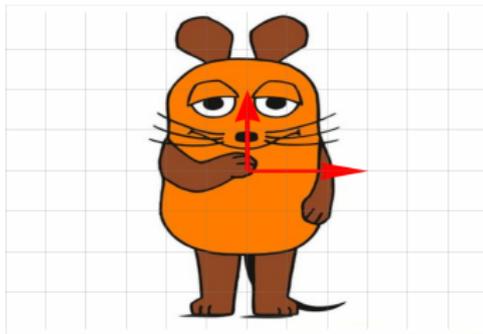
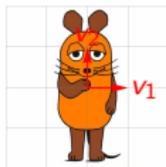
Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

1. Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie die Abbildung $F_a : x \mapsto Ax$. Die folgende Darstellung veranschaulicht eine mögliche Anwendung von F_a :



1(i) Betrachten Sie den Vektor

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie sein Bild Av_1 . Vergleichen Sie v_1 mit Av_1 geometrisch mit Hilfe der obigen Darstellung.

Antwort. Das Bild Av_1 ist dreimal so lang wie v_1 und zeigt in dieselbe Richtung wie v_1 .

1(ii) Vergleichen Sie v_1 mit Av_1 auch algebraisch.

Antwort. Av_1 ist die erste Spalte von A , also $Av_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3v_1$.

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung

Lerntest

1(iii) Betrachten Sie den Vektor

$$v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie sein Bild Av_2 . Vergleichen Sie v_2 mit Av_2 geometrisch mit Hilfe der obigen Darstellung.

Antwort. Das Bild Av_2 ist zweimal so lang wie v_2 und zeigt in dieselbe Richtung wie v_2 .

1(iv) Vergleichen und Sie v_2 mit Av_2 auch algebraisch.

Antwort. Av_2 ist die zweite Spalte von A , also $Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v_2$.

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

1(v) Welche Eigenschaft haben die Vektoren v_1 , v_2 gemeinsam?

Antwort. Sowohl v_1 als auch v_2 behalten unter der Abbildung F_a ihre Richtung bei: $Av_1 = 3v_1$ und $Av_2 = 2v_2$.

1(vi) Erklären Sie geometrisch, was die Abbildung F_a macht.

Antwort. Die Abbildung F_a streckt in Richtung v_1 mit dem Faktor 3, und sie streckt in Richtung v_2 mit dem Faktor 2.

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

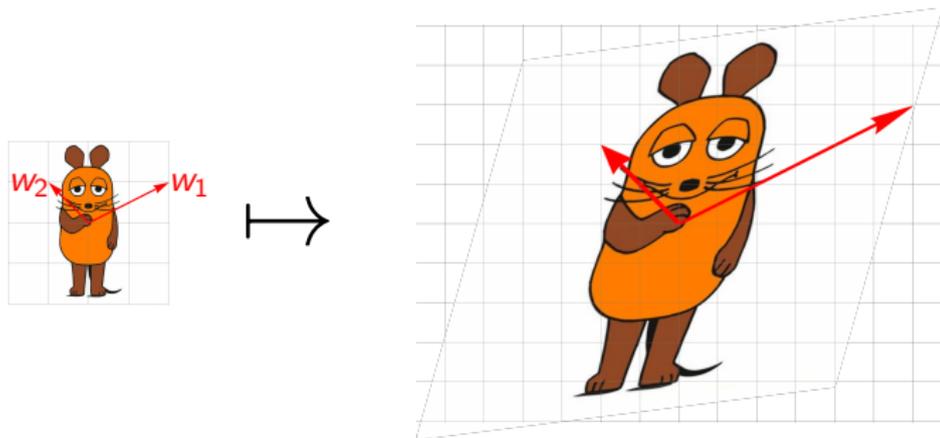
Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

2. Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

sowie die Abbildung $F_b : x \mapsto Bx$. Die folgende Darstellung veranschaulicht eine mögliche Anwendung von F_b :



Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

2(i) Betrachten Sie den Vektor

$$w_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie sein Bild Aw_1 . Vergleichen Sie w_1 mit Bw_1 geometrisch mit Hilfe der obigen Darstellung.

Antwort. Das Bild Bw_1 ist dreimal so lang wie w_1 und zeigt in dieselbe Richtung wie w_1 .

2(ii) Vergleichen und Sie w_1 mit Bw_1 auch algebraisch.

Antwort. $Bw_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3w_1$.

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung

Lerntest

2(iii) Betrachten Sie den Vektor

$$w_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie sein Bild Bw_2 . Vergleichen Sie w_2 mit Bw_2 geometrisch mit Hilfe der obigen Darstellung.

Antwort. Das Bild Bw_2 ist zweimal so lang wie w_2 und zeigt in dieselbe Richtung wie w_2 .

2(iv) Vergleichen und Sie w_2 mit Bw_2 auch algebraisch.

Antwort. $Bw_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2w_2$.

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

2(v) Welche Eigenschaft haben die Vektoren w_1 , w_2 gemeinsam?

Antwort. Sowohl w_1 als auch w_2 behalten unter der Abbildung F_b ihre Richtung bei: $Bw_1 = 3w_1$ und $Bw_2 = 2w_2$.

2(vi) Erklären Sie geometrisch, was die Abbildung F_b macht.

Antwort. Die Abbildung F_b streckt in Richtung w_1 mit dem Faktor 3, und sie streckt in Richtung w_2 mit dem Faktor 2.

Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

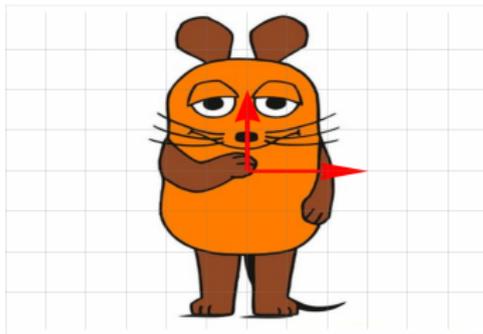
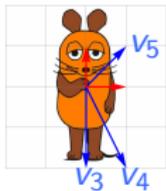
Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

3. Betrachten Sie wie in Aufgabe 1 die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und erneut die Abbildung $F_a : x \mapsto Ax$.



Aufgabe 1

Aufgabe 2

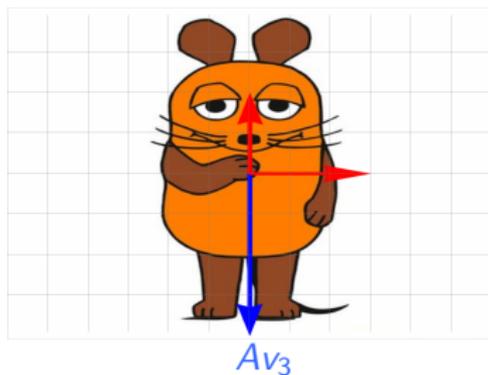
Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

3(i) Betrachten Sie den Vektor $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie sein Bild Av_3 und zeichnen Sie es in der rechten Skizze ein. Vergleichen Sie v_3 mit Av_3 sowohl geometrisch als auch algebraisch. Besitzt v_3 dieselbe Eigenschaft wie die Vektoren v_1 und v_2 , welche Sie in der Teilaufgabe 1 beobachtet haben?

Antwort. $Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 2v_3$. D.h. auch v_3 wird von F_a wie v_2 mit dem Faktor 2 gestreckt und behält seine Richtung bei.



Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

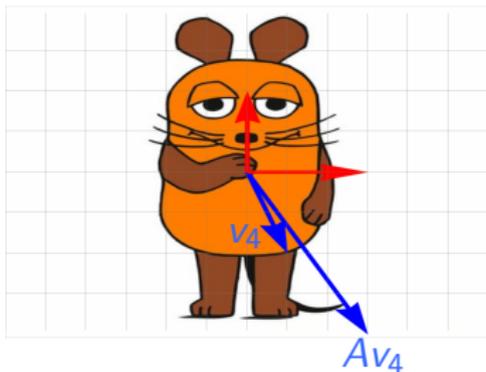
Aufgabe 4

Auswertung

Lerntest

3(ii) Betrachten Sie den Vektor $v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie sein Bild Av_4 und zeichnen Sie es in der rechten Skizze ein. Vergleichen Sie v_4 mit Av_4 sowohl geometrisch als auch algebraisch. Besitzt v_4 dieselbe Eigenschaft wie die Vektoren v_1 und v_2 aus Teilaufgabe 1?

Antwort. $Av_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. D.h. v_4 behält unter F_a seine Richtung **nicht** bei.



Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

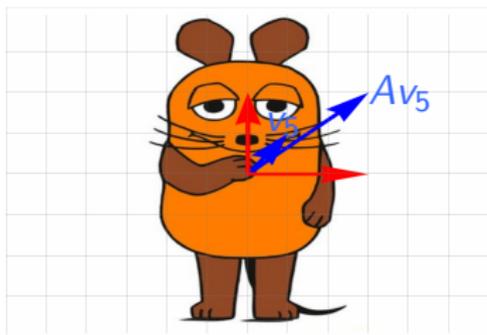
Auswertung
Lerntest

3(iii) Betrachten Sie den Vektor $v_5 := v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen

Sie sein Bild Av_5 und zeichnen Sie es in der rechten Skizze ein. Vergleichen Sie v_5 mit Av_5 sowohl geometrisch als auch algebraisch.

Besitzt v_5 dieselbe Eigenschaft wie die Vektoren v_1 und v_2 aus Teilaufgabe 1?

Antwort. $Av_5 = Av_1 + Av_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D.h. v_5 behält unter F_a seine Richtung **nicht** bei.



Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

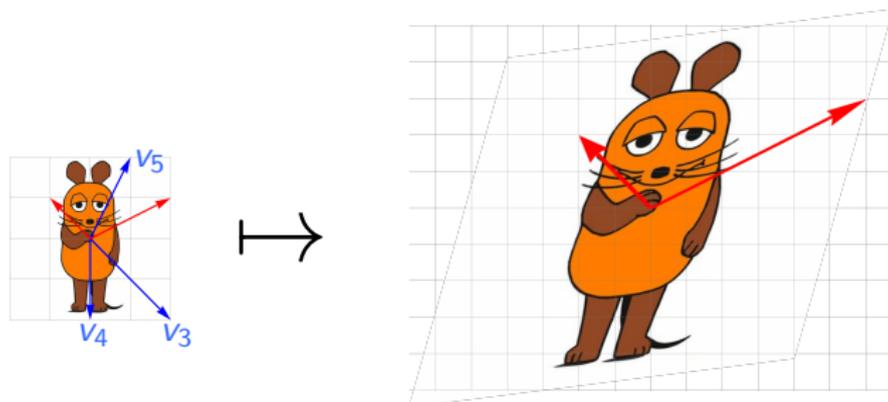
Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

4. Betrachten Sie wie in Aufgabe 2 die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

und erneut die Abbildung $F_b : x \mapsto Bx$.



Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

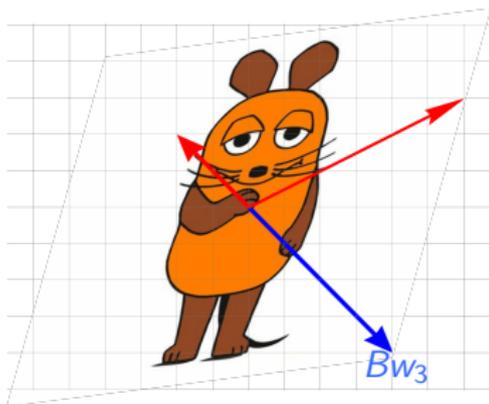
4(i) Betrachten Sie den Vektor $w_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie sein

Bild Bw_3 und zeichnen Sie es in der rechten Skizze ein.

Vergleichen Sie w_3 mit Bw_3 sowohl geometrisch als auch algebraisch.

Besitzt w_3 dieselbe Eigenschaft wie die Vektoren w_1 und w_2 , welche Sie in der Teilaufgabe 2 beobachtet haben?

Antwort. $Bw_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 2w_3$. D.h. auch w_3 wird von F_b wie w_2 mit dem Faktor 2 gestreckt und behält seine Richtung bei.



Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

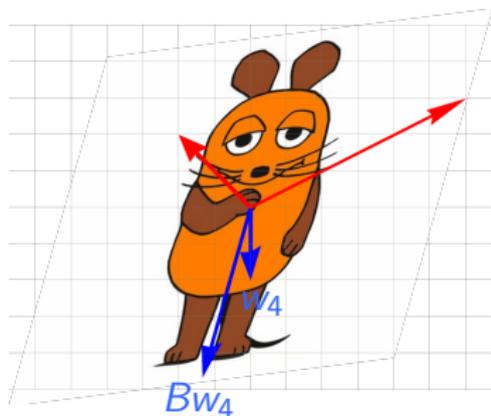
Auswertung

Lerntest

4(ii) Betrachten Sie den Vektor $w_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie sein Bild Bw_4 und zeichnen Sie es in der rechten Skizze ein. Vergleichen Sie w_4 mit Bw_4 sowohl geometrisch als auch algebraisch.

Besitzt w_4 dieselbe Eigenschaft wie die Vektoren w_1 und w_2 aus Teilaufgabe 2?

Antwort. $Bw_4 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -14/3 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. D.h. w_4 behält unter F_b seine Richtung **nicht** bei.



Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung

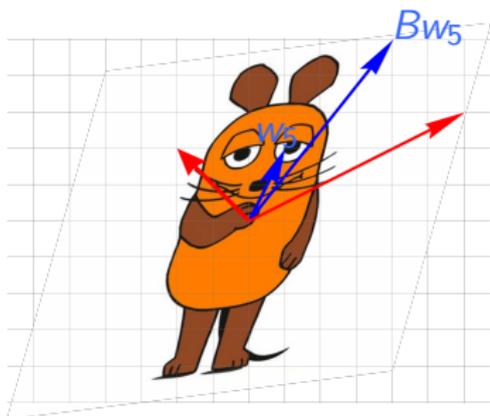
Lerntest

4(iii) Betrachten Sie den Vektor $w_5 := w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie sein Bild Bw_5 und zeichnen Sie es in der rechten Skizze ein. Vergleichen Sie w_5 mit Bw_5 sowohl geometrisch als auch algebraisch.

Besitzt w_5 dieselbe Eigenschaft wie die Vektoren w_1 und w_2 aus Teilaufgabe 2?

Antwort. $Bw_5 = Bw_1 + Bw_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. D.h. w_5 behält unter F_b seine Richtung **nicht** bei.



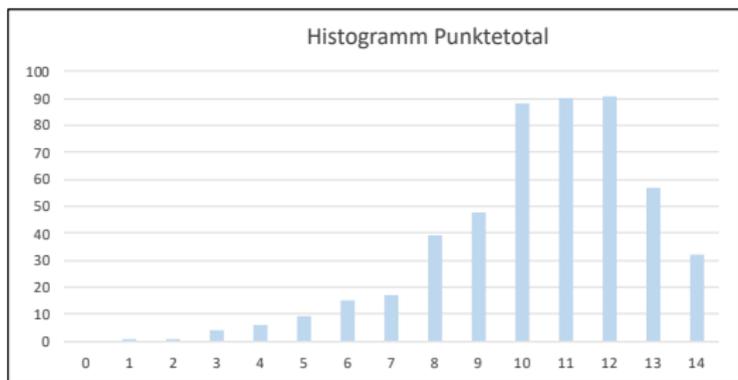
Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest



► Hervorragendes Resultat (grosses Lob!!)

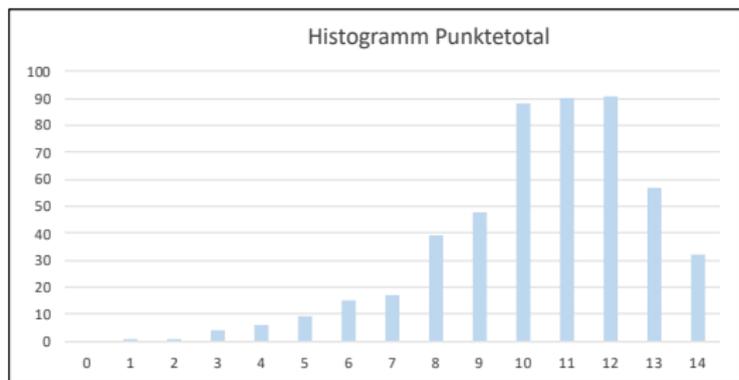
Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest



- ▶ Hervorragendes Resultat (grosses Lob!!)
Achtung. Bitte nicht auf den Lorbeeren ausruhen!

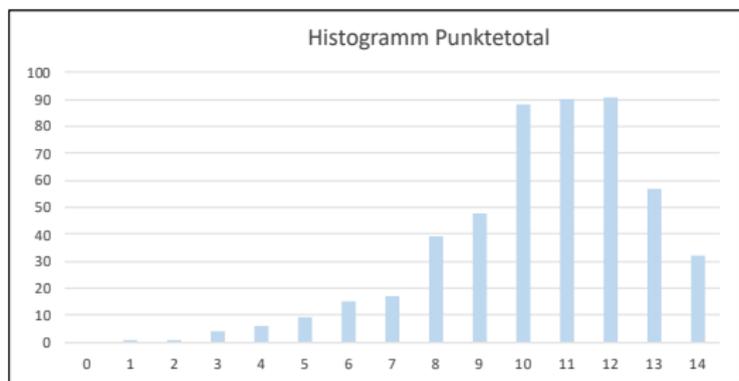
Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest



Aufgabe 1

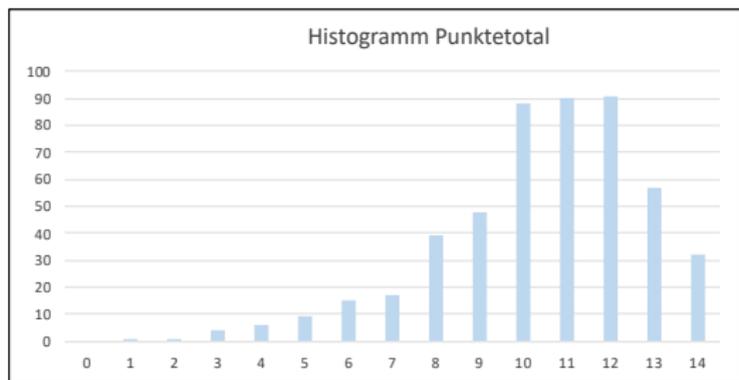
Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

- ▶ Hervorragendes Resultat (grosses Lob!!)
Achtung. Bitte nicht auf den Lorbeeren ausruhen!
- ▶ Gute Selbsteinschätzung



Aufgabe 1

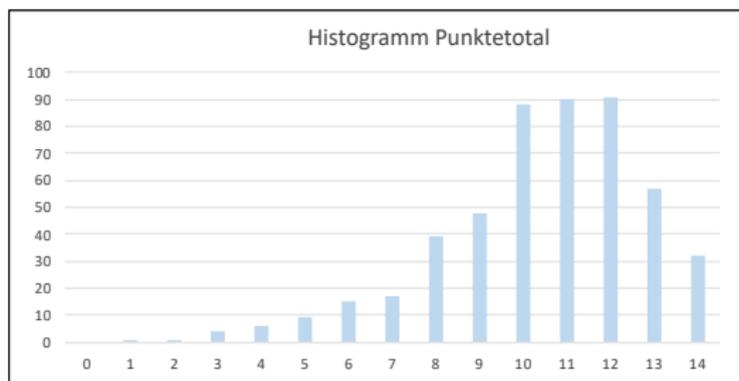
Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

- ▶ Hervorragendes Resultat (grosses Lob!!)
Achtung. Bitte nicht auf den Lorbeeren ausruhen!
- ▶ Gute Selbsteinschätzung
- ▶ $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.



Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Auswertung
Lerntest

- ▶ Hervorragendes Resultat (grosses Lob!!)
Achtung. Bitte nicht auf den Lorbeeren ausruhen!
- ▶ Gute Selbsteinschätzung
- ▶ $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- ▶ Schiefsymmetrische Matrizen ($A^T = -A$) haben Nullen auf der Diagonalen.