Lineare Algebra II

Bonusaufgabe B

1. Betrachten Sie das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Rufen Sie sich die folgenden Zusammenhänge in Erinnerung:

- Die Länge eines Vektors $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ ist durch $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ gegeben: Also $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
- Für den Winkel γ zwischen zwei Vektoren u und w gilt $\frac{\langle u,w \rangle}{\|u\| \|w\|} = \cos(\gamma)$.
- Zwei Vektoren u und w, welche die Bedingung $\langle u, w \rangle = 0$ erfüllen, heissen orthogonal.

Betrachten Sie die Vektoren

$$c := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1(a) Berechnen Sie die Länge des Vektors c. Betrachten Sie zusätzlich die Vektoren $f = 2c$ und $g = -3c$. Basierend auf der Länge des Vektors c, was würden Sie für die Längen der Vektoren f und g erwarten (unter Berücksichtigung der geometrischen Interpretationen der Vektoren)?

Antwort. $\|c\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$

Wird ein Vektor mit dem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ gestreckt, wird seine Länge mit $|\lambda|$ multipliziert. Also:

$\|f\| = \|2c\| = |2|\|c\| = 2 \cdot 3 = 6$

$\|g\| = \|-3c\| = |-3|\|c\| = 3 \cdot 3 = 9$

1(b) Verifizieren Sie Ihre Vermutungen aus Teilaufgabe (a), indem Sie die Längen der Vektoren f und g berechnen.

Antwort. Wir machen das grad allgemein:

$$\begin{aligned}\|\lambda c\| &= \sqrt{(\lambda c_1)^2 + (\lambda c_2)^2 + (\lambda c_3)^2} = \\ &= \sqrt{\lambda^2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)} = \\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \\ &= |\lambda|\|c\|\end{aligned}$$

1(c) Berechnen Sie die Längen der Vektoren d und e.

Antwort.

$\|d\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$

$\|e\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

1(d) Existiert ein Vektor mit Länge 0 im Vektorraum $\mathbb{R}^3$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor.

Antwort. Erstens: Der Nullvektor hat die Länge 0.

Zweitens: **Nur** der Nullvektor hat die Länge 0. (Eine Summe von Quadraten ist nur dann Null, wenn jedes Quadrat Null ist.)

1(e) Existiert ein Vektor mit negativer Länge im Vektorraum $\mathbb{R}^3$?

Antwort. Nein, die Wurzel aus einer reellen nichtnegativen Zahl ist immer ≥ 0.

1(f) Berechnen Sie den Winkel γ zwischen den Vektoren c und d. Sind die Vektoren c und d orthogonal? Wie gross ist der Winkel zwischen den Vektoren $f = 2c$ und d? Wie gross ist zudem der Winkel zwischen den Vektoren $g = -3c$ und d?

Antwort. $\langle c, d\rangle = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 2$. Somit gilt für den Zwischenwinkel γ:

$$\cos\gamma = \frac{\langle c, d\rangle}{\|c\|\|d\|} = \frac{2}{3\sqrt{21}}$$

Man findet $\gamma \approx 1.4248$ im Bogenmass, oder $\gamma \approx 81.635°$.

Somit ist auch der Winkel zwischen λc für $\lambda > 0$ und d gleich γ, denn:

$$\langle \lambda c, d\rangle = \lambda c_1 d_1 + \lambda c_2 d_2 + \lambda c_3 d_3 = \lambda(c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3) = \lambda\langle c, d\rangle.$$

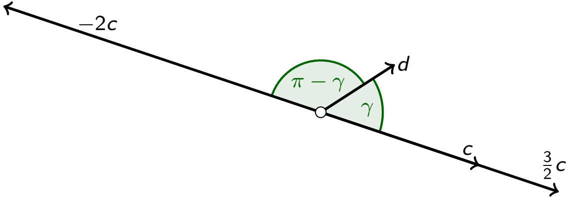
Also ist der Cosinus des Winkels (und somit auch der Winkel selber) zwischen λc und d immer noch der gleiche:

$$\frac{\langle \lambda c, d\rangle}{\|\lambda c\|\|d\|} = \frac{\lambda\langle c, d\rangle}{|\lambda|\|c\|\|d\|} = \frac{\langle c, d\rangle}{\|c\|\|d\|}.$$

Achtung: Ist $\lambda < 0$, wechselt das Vorzeichen des Cosinus:

$$\frac{\langle \lambda c, d\rangle}{\|\lambda c\|\|d\|} = \frac{\lambda\langle c, d\rangle}{|\lambda|\|c\|\|d\|} = -\frac{\langle c, d\rangle}{\|c\|\|d\|}.$$

D.h. für $\lambda < 0$ ist der Winkel zwischen λc und d gleich $\pi - \gamma$ (respektive $180^\circ - \gamma$).



1(g) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren d und e. Sind die Vektoren d und e orthogonal? Wie gross ist zudem der Winkel zwischen den Vektoren $h = 4e$ und d?

Antwort. $\langle d, e\rangle = 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 0$. D.h. der Cosinus des Zwischenwinkels ist 0, der Winkel selber also ein rechter. Somit ist für alle $\lambda \neq 0$ auch der Winkel zwischen λc und d ein rechter.

1(h) Versuchen Sie, Ihre Resultate aus den vorhergehenden Teilaufgaben zu verallgemeinern: Was lässt sich über den Winkel zwischen zwei orthogonalen Vektoren aussagen?

Antwort. u und v sind orthogonal, wenn $\langle u, v\rangle = 0$. Sind beide Vektoren nicht der Nullvektor, so ist der Cosinus des Zwischenwinkels 0, also der Winkel $\pi/2$.

1(i) Was lässt sich über das Skalarprodukt zweier Vektoren u, v sagen, welche einen Winkel von π einschliessen?

Antwort. $u = \lambda v$ für ein $\lambda < 0$. Also
$\langle u, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle = \lambda\|v\|^2 < 0$.

2 Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^5$. Da der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ analog zum Vektorraum $\mathbb{R}^5$ aufgebaut ist, können wir im Vektorraum $\mathbb{R}^5$ ein entsprechendes Skalarprodukt definieren:

$$\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_5 \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{5} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_5 b_5$$

Zusätzlich ist die Länge eines Vektors $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in \mathbb{R}^5$ durch $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_5^5}$ gegeben.
Betrachten Sie die Vektoren

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

2(a) Berechnen Sie die Länge des Vektors c. Betrachten Sie zusätzlich die Vektoren $f = 4c$ und $g = -5c$. Basierend auf der Länge des Vektors c, was würden Sie für die Längen der Vektoren f und g erwarten?

Antwort. $\|c\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{39}$.

Wird ein Vektor mit dem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ gestreckt, wird seine Länge mit $|\lambda|$ multipliziert. Also:

$\|f\| = \|4c\| = |4|\|c\| = 4\sqrt{39}$

$\|g\| = \|-5c\| = |-5|\|c\| = 5\sqrt{39}$

2(b) Verifizieren Sie Ihre Vermutungen aus Teilaufgabe a), indem Sie die Längen der Vektoren f und g berechnen.

Antwort. Wir machen das grad allgemein:

$$\begin{aligned} \|\lambda c\| &= \sqrt{(\lambda c_1)^2 + \cdots + (\lambda c_5)^2} = \\ &= \sqrt{\lambda^2 (c_1^2 + \cdots + c_5^2)} = \\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{c_1^2 + \cdots + c_5^2} = \\ &= |\lambda|\|c\| \end{aligned}$$

2(c) Berechnen Sie die Längen der Vektoren d und e.

Antwort.

$\|d\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\|e\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-4)^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{53}$

2(d) Existiert ein Vektor mit Länge 0 im Vektorraum $\mathbb{R}^5$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor.

Antwort. Erstens: Der Nullvektor hat die Länge 0.

Zweitens: **Nur** der Nullvektor hat die Länge 0. (Eine Summe von Quadraten ist nur dann Null, wenn jedes Quadrat Null ist.)

2(e) Existiert ein Vektor mit negativer Länge im Vektorraum $\mathbb{R}^5$?

Antwort. Nein, die Wurzel aus einer reellen nichtnegativen Zahl ist immer ≥ 0.

3 Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Da der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ähnlich aufgebaut ist wie der Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, können wir nicht nur im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die Länge eines Vektors definieren, sondern auch im Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Die Länge eines Vektors p im Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ist wie folgt definiert:

$$\|p\| := \sqrt{\int_0^1 p(x)p(x)dx} = \sqrt{\int_0^1 p(x)^2 dx}$$

Betrachten Sie die Polynome

$$\begin{aligned} v(x) &:= -3x^2 + 2x - 4 \\ u(x) &:= 2x^2 + 6 \\ w(x) &:= -x^2 + 3x - 8 \end{aligned}$$

3(a) Berechnen Sie die Länge des Vektors v. Betrachten Sie zusätzlich die Vektoren $s = 3v$ und $t = -4v$. Basierend auf der Länge des Vektors v, was würden Sie für die Längen der Vektoren s und t erwarten?

Antwort.

$\|c\| = \sqrt{\int_0^1 v(x)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (-3x^2 + 2x - 4)^2 dx} = 11\sqrt{2/15}$.

Wird ein Vektor mit dem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ gestreckt, wird seine Länge mit $|\lambda|$ multipliziert. Also:

$\|s\| = \|3v\| = |3|\|v\| = 33\sqrt{2/15}$

$\|t\| = \| - 4v\| = | - 4|\|c\| = 44\sqrt{2/15}$

3(b) Verifizieren Sie Ihre Vermutungen aus Teilaufgabe a), indem Sie die Längen der Vektoren s und t berechnen.

Antwort. Wir machen das grad allgemein:

$$\begin{aligned}\|\lambda v\| &= \sqrt{\int_0^1 (\lambda v(x))^2 dx} = \\ &= \sqrt{\lambda^2 \int_0^1 v(x)^2 dx} = \\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\int_0^1 v(x)^2 dx} = \\ &= |\lambda|\|v\|\end{aligned}$$

3(c) Berechnen Sie die Längen der Vektoren u und w.

Antwort. $\|u\| = \sqrt{\int_0^1 u(x)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (2x^2+6)^2 dx} = 4\sqrt{14/5}$.

$\|w\| = \sqrt{\int_0^1 w(x)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (-x^2+3x-8)^2 dx} = \sqrt{1411/30}$.

3(d) Existiert ein Vektor mit Länge 0 im Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor.

Antwort. Erstens: Das Nullpolynom $p(x) \equiv 0$ hat die Länge 0.

Zweitens: **Nur** das Nullpolynom hat die Länge 0. Denn: Das Integral einer Funktion ≥ 0 ist nur dann Null, wenn die Funktion selber auf dem Integrationsintervall überall Null ist. Und ein Polynom, das auf $[0, 1]$ identisch Null ist, ist das Nullpolynom.

3(e) Existiert ein Vektor mit negativer Länge im Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?

Antwort. Nein, die Wurzel aus einer reellen nichtnegativen Zahl ist immer ≥ 0.

4. In der Tabelle sind die Vektorräume aufgeführt, welche in den vorhergehenden Aufgaben diskutiert worden sind. Da die drei Vektorräume ähnlich aufgebaut sind, würden wir auch die Existenz eines Skalarproduktes im Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ erwarten. Vergleichen und kontrastieren Sie die Einträge in der Tabelle miteinander – welchen Ausdruck vermuten Sie für den leeren Tabelleneintrag?

Vektorraum V	Länge eines Vektors $v \in V$	Skalarprodukt zweier Vektoren $a, b \in V$
$\mathbb{R}^3$	$\lVert v \rVert = \sqrt{v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3}$	$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
$\mathbb{R}^5$	$\lVert v \rVert = \sqrt{v_1 v_1 + \cdots + v_3 v_3}$	$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_5 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_5 b_5$
$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$	$\lVert v \rVert = \sqrt{\int_0^1 v(x) v(x) dx}$	$\langle a, b \rangle = \int_0^1 a(x) b(x) dx$