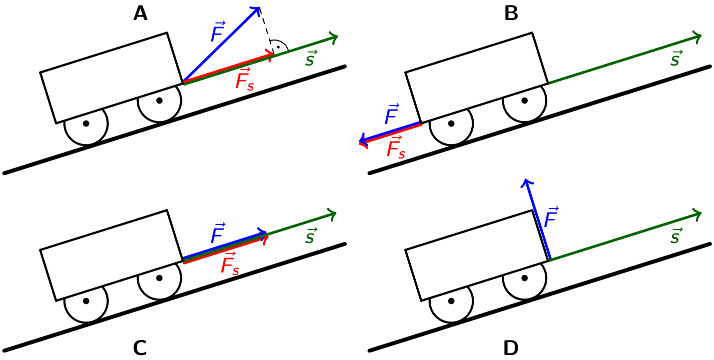
Lineare Algebra II

Bonusaufgabe

1. Betrachten Sie die folgenden Situation, in welchen ein Wagen mit der Kraft $\vec{F}$ entlang einer Steigung gezogen wird.



1a) Vergleichen und kontrastieren Sie die beiden Vektoren $\vec{F_s}$ und $\vec{s}$. Was können Sie über die Beziehung der beiden Vektoren zueinander aussagen (geometrisch und algebraisch)?

Antwort:

A: $\vec{F_s}$ und $\vec{s}$ haben dieselbe Richtung: $\vec{F_s} = \lambda\vec{s}$ für ein $\lambda > 0$.

B: $\vec{F} = \vec{F_s}$ und $\vec{s}$ haben entgegengesetzte Richtung: $\vec{F_s} = \lambda\vec{s}$ für ein $\lambda < 0$.

C: $\vec{F} = \vec{F_s}$ und $\vec{s}$ haben dieselbe Richtung: $\vec{F_s} = \lambda\vec{s}$ für ein $\lambda > 0$.

D: $\vec{F_s} = 0$, also $\vec{F_s} = \lambda\vec{s}$ für $\lambda = 0$.

Beachte: In jedem Fall gilt

- $\vec{F_s} = \lambda\vec{s}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$,

1b) Vergleichen und kontrastieren Sie die beiden Vektoren $\vec{s}$ und $\vec{F} - \vec{F}_s$. Was können Sie über die Beziehung der beiden Vektoren zueinander aussagen (geometrisch und algebraisch)?

Antwort:

A: $\vec{F} - \vec{F}_s$ und $\vec{s}$ sind orthogonal: $\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$.

B und C: $\vec{F} - \vec{F}_s = 0$.

D: $\vec{F} - \vec{F}_s = \vec{F}$ und $\vec{s}$ sind orthogonal: $\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$.

Beachte: In jedem Fall gilt

- $\vec{F} - \vec{F}_s$ und $\vec{s}$ sind orthogonal, d.h. $\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$.

Die folgenden beiden Relationen formalisieren die Beobachtungen aus den vorhergehenden Teilaufgaben:

i) $\vec{F_s} = \lambda \vec{s}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) $\vec{F} - \vec{F_s}$ und $\vec{s}$ sind orthogonal, d.h. $\langle \vec{F} - \vec{F_s}, \vec{s} \rangle = 0$

1c) Verwenden Sie die Relationen i) und ii), um einen Ausdruck für λ zu finden:

Antwort:

$$0 \overset{ii)}{=} \langle \vec{F} - \vec{F_s}, \vec{s} \rangle \overset{i)}{=} \langle \vec{F} - \lambda\vec{s}, \vec{s} \rangle = \langle \vec{F}, \vec{s} \rangle - \lambda \langle \vec{s}, \vec{s} \rangle.$$

Auflösen nach λ liefert:

$$\lambda = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle} = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{\|\vec{s}\|^2}$$

1d) Setzen Sie Ihr Resultat von der Teilaufgabe c) in die Relation i) ein, um einen Ausdruck für $\vec{F_s}$ zu erhalten:

Antwort:

$$\vec{F_s} \overset{i)}{=} \lambda \vec{s} \overset{c)}{=} \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle} \vec{s} = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{\|\vec{s}\|^2} \vec{s} = \langle \vec{F}, \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|} \rangle \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}.$$

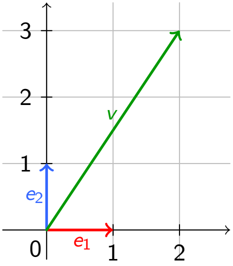
2. Wir möchten den Ausdruck aus Aufgabe 1 verallgemeinern. Dazu definieren wir die Abbildung

$$\Pi_v : u \mapsto \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v,$$

wobei $u, \ v \in \mathbb{R}^2$ und wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Betrachten Sie die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2a) Zeichnen Sie die Vektoren e_1, e_2 und v in ein zweidimensionales Koordinatensystem ein.



2b) Drücken Sie v als eine Linearkombination von e_1 und e_2 aus.

Antwort: $v = 2e_1 + 3e_2$.

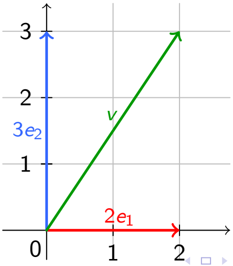
2c) Berechnen Sie die Vektoren $\Pi_{e_1}(v)$ und $\Pi_{e_2}(v)$. Zeichnen Sie diese Vektoren ebenfalls in das Koordinatensystem ein. Was scheint die geometrische Interpretation dieser Vektoren zu sein?

Antwort:

$$\Pi_{e_1}(v) = \frac{\langle v, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 = \langle v, e_1 \rangle e_1 = 2e_1$$

$$\Pi_{e_2}(v) = \frac{\langle v, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2 = \langle v, e_2 \rangle e_2 = 3e_2$$

Die Projektionen $\Pi_{e_1}(v) = 2e_1$ und $\Pi_{e_2}(v) = 3e_2$ sind just die Summanden in der Linearkombination $v = 2e_1 + 3e_2$.



2d) Drücken Sie v als Linearkombination von $\Pi_{e_1}(v)$ und $\Pi_{e_2}(v)$ aus.

Antwort: $v = \Pi_{e_1}(v) + \Pi_{e_2}(v)$

2e) Vergleichen und kontrastieren Sie Ihre Resultate von den Teilaufgaben b) und d). Was fällt Ihnen auf? Sehen Sie eine Möglichkeit, die Skalare in der Linearkombination von Teilaufgabe b) mit Hilfe von Skalarprodukten zu berechnen?

Antwort:

Aus b): $v = 2e_1 + 3e_2$.

Aus d): $v = \Pi_{e_1}(v) + \Pi_{e_2}(v) = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2$

Also: Die Koeffizienten der Linearkombination ergeben sich einfach als Skalarprodukt des Vektors v mit den Basisvektoren.

Warum gilt das allgemein?
Sei $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. Dann folgt

$$\langle v, e_1\rangle = \langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, e_1\rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle e_1, e_1\rangle}_{=1} + \lambda_2 \underbrace{\langle e_2, e_1\rangle}_{=0} = \lambda_1$$

$$\langle v, e_2\rangle = \langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, e_2\rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle e_1, e_2\rangle}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\langle e_2, e_2\rangle}_{=1} = \lambda_2$$

3. In der folgenden Aufgabe möchten wir die Abbildung von Aufgabe 2 für den Vektorraum $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ untersuchen:

$$\Pi_p : q \mapsto \frac{\langle q, p\rangle}{\langle p, p\rangle} p,$$

wobei $p, q \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ und wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das folgende Skalarprodukt des Vektorraumes $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ bezeichnet:

$$\mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\langle q, p\rangle := \int_0^1 q(x)p(x)dx$$

Betrachten Sie die Polynome

$$p_1(x) = 1, \; p_2(x) = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}, \; s(x) = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}.$$

3a) Drücken Sie s als Linearkombination von p_1 und p_2 aus.

Antwort:

$$s(x) = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3} \stackrel{!}{=} \lambda_1 p1(x) + \lambda_2 p_2(x) = \lambda_1 1 + \lambda_2(2\sqrt{3}x - \sqrt{3})$$

Koeffizientenvergleich (Gauss!) liefert: $\lambda_2 = -1/2, \; \lambda_1 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

3b) Berechnen Sie die Vektoren $\Pi_{p_1}(v)$ und $\Pi_{p_2}(v)$. Drücken Sie s als Linearkombination von $\Pi_{p_1}(v)$ und $\Pi_{p_2}(v)$ aus.

Antwort. Beachte: $\langle p_1, p_1 \rangle = \langle p_2, p_2 \rangle = 1$ und $\langle p_1, p_2 \rangle = 0$.

$$\Pi_{p_1}(s) = \frac{\langle s, p_1 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} p_1 = \langle s, p_1 \rangle p_1 = \frac{9\sqrt{3}}{2} p_1$$

$$\Pi_{p_2}(s) = \frac{\langle s, p_2 \rangle}{\langle p_2, p_2 \rangle} p_2 = \langle s, p_2 \rangle p_2 = -1/2 p_2$$

Also

$$s = \Pi_{p_2}(s) + \Pi_{p_2}(s).$$

3c) Vergleichen und kontrastieren Sie Ihre Resultate von den Teilaufgaben a) und b). Was fällt Ihnen auf? Sehen Sie eine Möglichkeit, die Skalare in der Linearkombination von Teilaufgabe a) mit Hilfe von Skalarprodukten zu berechnen?

Antwort:

Aus a): $s = \frac{9\sqrt{3}}{2} p_1 + \frac{-1}{2} p_2$.

Aus b):

$\Pi_{p_1}(s) + \Pi_{p_2}(s) = \langle s, p_1 \rangle p_1 + \langle s, p_2 \rangle p_2 = \frac{9\sqrt{3}}{2} p_1 + \frac{-1}{2} p_2 = s$

Also: Die Koeffizienten der Linearkombination ergeben sich einfach als Skalarprodukt des Vektors s mit den Basisvektoren.

Warum gilt das allgemein?
Sei $s = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$. Dann folgt

$$\langle s, p_1 \rangle = \langle \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, p_1 \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle p_1, p_1 \rangle}_{=1} + \lambda_2 \underbrace{\langle p_2, p_1 \rangle}_{=0} = \lambda_1$$

$$\langle s, p_2 \rangle = \langle \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, p_2 \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle p_1, p_2 \rangle}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\langle p_2, p_2 \rangle}_{=1} = \lambda_2$$