Lineare Algebra II

Bonusaufgabe

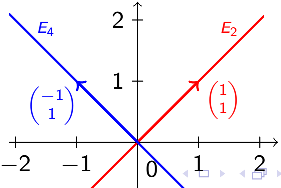
1. Betrachten Sie die Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Zeichnen Sie sowohl den Eigenraum von A_1 als auch den Eigenraum von A_2 in ein 2-dimensionales Koordinatensystem.

Antwort. EW von A_1: $\det(A_1 - \lambda \mathbb{I}) = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$.

Eigenraum $E_2 = \operatorname{kern}(A_1 - 2\mathbb{I}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Eigenraum $E_4 = \operatorname{kern}(A_1 - 4\mathbb{I}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

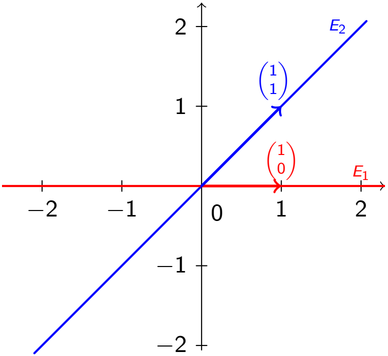


Dasselbe für A_2:

EW von A_2: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

Eigenraum $E_1 = \mathrm{kern}(A_2 - 1\mathbb{I}) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Eigenraum $E_2 = \mathrm{kern}(A_2 - 2\mathbb{I}) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.



1b) Diagonalisieren Sie die Matrix A_1.

Antwort. Die Idee ist folgende: Die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto A_1 x$ hat in der Standardbasis $\mathcal{E}$ die Darstellungsmatrix A_1. Die Darstellungsmatrix von F in einer Eigenbasis $\mathcal{B}$ muss diagonal sein, denn EV werden einfach nur mit dem EW gestreckt. D.h. wir wählen die Übergangsmatix T von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{E}$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann wird die Dastellungsmatrix von F bezüglich $\mathcal{B}$:

$$T^{-1} A_1 T = \mathrm{diag}(2, 4).$$

1c) Ist es möglich, die Matrix A_1 auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe a). Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

Antwort. Die EV von A_1 sind orthogonal, insbesondere ist $\tilde{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Transformationsmatrix.

Recall: Dann gilt $\tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^{\top}$.

1d) Diagonalisieren Sie die Matrix A_2.

Antwort. Wie oben:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies T^{-1} A_2 T = \mathrm{diag}(1, 2).$$

1e) Ist es möglich, die Matrix A_2 auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe a). Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

Antwort. Die EV von A_2 sind nicht orthogonal, insbesondere sind die Spalten der Transformationsmatrix T nicht orthogonal und somit gibt es in diesem Fall keine orthogonale Transformationsmatrix.

2 Betrachten Sie die Matrizen $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und

$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2a) Diagonalisieren Sie die Matrix B_1.

Antwort. Die EW von B_1 sind $\lambda_1 = 11, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.
Die Eigenräume sind

$$E_{11} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, E_0 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Also folgt mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 10 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

dass $T^{-1} B_1 T = \operatorname{diag}(11, 0, 0)$.

2b Ist es möglich, die Matrix B_1 auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

Antwort. Ja! Die Vektoren aus E_{11} und E_0 stehen bereits senkrecht zueinander. Wir können also einfach einen Einheitsvektor aus E_{11} und mit Gram-Schmidt zwei orthonormale EV in E_0 wählen und sie als Spalten von T verwenden:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}$$

2c) Diagonalisieren Sie die Matrix B_2.

Antwort. Die EW von B_2 sind $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$.
Die Eigenräume sind

$$E_{-2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, E_{-1} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, E_{1} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Also folgt mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dass $T^{-1} B_2 T = \operatorname{diag}(-2, -1, 1)$.

2d) Ist es möglich, die Matrix B_2 auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren?

Antwort. Nein, die EV zu den EW -2 und -1 von B_2 sind nicht orthogonal.

3. Vergleichen und kontrastieren Sie die Matrizen A_1 und B_1. Welche Eigenschaft haben diese beiden Matrizen gemeinsam?

Antwort. Die Matrizen A_1 und B_1 sind symmetrisch. Ihre Eigenräume sind orthogonal. B_1 hat zwar einen zweidimensionalen Eigenraum, aber dort kann man mit Gram-Schmidt zwei orthonormale EV bestimmen. Auf diese Weise ergibt sich eine orthonormale Eigenbasis. Nimmt man diese Vektoren als Spalten der Transformatonsmatrix T, so ist T orthogonal.