# Serie 6 - Bonusaufgabe

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt am **Freitag, 29. März** in der Übungsstunde. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.
Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

---

**1.** Betrachten Sie die Matrizen $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Zeichnen Sie sowohl den Eigenraum von $A_1$ als auch den Eigenraum von $A_2$ in ein 2-dimensionales Koordinatensystem.

b) Diagonalisieren Sie die Matrix $A_1$.

c) Ist es möglich, die Matrix $A_1$ auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe a). Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

d) Diagonalisieren Sie die Matrix $A_2$.

e) Ist es möglich, die Matrix $A_2$ auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe a). Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

**2.** Betrachten Sie die Matrizen $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Diagonalisieren Sie die Matrix $B_1$.

b) Ist es möglich, die Matrix $B_1$ auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

c) Diagonalisieren Sie die Matrix $B_2$.

d) Ist es möglich, die Matrix $B_2$ auch mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

**3.** Vergleichen und kontrastieren Sie die Matrizen $A_1$ und $B_1$. Welche Eigenschaft haben diese beiden Matrizen gemeinsam?

D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2018

Prof. Dr. N. Hungerbühler

# Serie 6

Die Aufgaben 1–5 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 5. April um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

**1.** Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so, dass $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat. Dann gilt:

(a) $\dim(\text{Bild}\, A) = n$

(b) $\dim(\text{Bild}\, A) = 1$

(c) $\dim(\text{Kern}\, A) = 0$

(d) $\dim(\text{Kern}\, A) = 1$

**2.** Seien $A$ und $B$ Darstellungsmatrizen einer Funktion $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\det A = \det B$.

(a) Richtig

(b) Falsch

**3.** Ein Vektor habe bezüglich der Basis $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $(-1, -1)$. Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind ...

(a) $(\frac{1}{2}, 0)$

(b) $(-1, -1)$

(c) $(0, -2)$

(d) $(2, 0)$

(e) $(1, 1)$

**4.** Das Bild von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

wird aufgespannt von den Vektoren ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

**5.** Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$

**6.** Gegeben sei der Vektorraum $V^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\mathcal{B}$. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von $V^3$ nach $V^3$.

a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix $T$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

b) Durch welche Matrix $B$ wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten beschrieben?

c) Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch.

**7.** Gegeben seien zwei lineare Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie mit Hilfe der *Fredholm-Alternative*, ob die beiden Gleichungssysteme jeweils eine Lösung besitzen.

**8.** *Darstellung eines vierdimensionalen Würfels*:
Sei $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 : 0 \le x_i \le 1\}$ der Einheitswürfel in $\mathbb{R}^4$. Wir betrachten die Projektionen $P_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ entlang von $(1, 1, 1, -2)^\top$ auf den Unterraum mit $x_4 = 0$ und $P_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ entlang von $(2, 1, -4, 0)^\top$ auf den Unterraum mit $x_3 = 0$, sowie die Abbildung

$$E : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \mapsto (x_1, x_2)^\top.$$

a) Man bestimme die Darstellungsmatrizen von $P_1, P_2$ und $E$.

b) Man bestimme die Darstellungsmatrizen der zusammengesetzten Abbildungen $P_2 \circ P_1$ und $\phi := E \circ P_2 \circ P_1$.

c) Man skizziere das Bild der Kanten von $W$ unter $\phi$.