Serie 7

Aufgabe 1 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 12. April um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

1. Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3,\ p(x) \mapsto p(x) - p'(x)$ hat die Eigenwerte ...

(a) 0 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

(b) 0 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

(c) 1 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

(d) 1 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

2.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie von Hand eine orthogonale Eigenbasis zu A.

c) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit Matlab.

3.

a) Diagonalisieren Sie – falls möglich – die Matrizen

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Kann man in den Fällen, in denen die Matrizen diagonalisierbar sind, die entsprechenden Transformationsmatrizen T orthogonal wählen? Wenn ja, geben Sie so ein T an.

4. Angeregt durch die berühmte Kaninchenaufgabe von Leonardo von Pisa (1170–1250), genannt Fibonacci, stellen wir die folgende Aufgabe:
Annahme: Neugeborene Kaninchenpaare bringen nach dem ersten und dem zweiten Monat jeweils ein neues Kaninchenpaar zur Welt und stellen dann die weitere Fortpflanzung ein.

a) Man bestimme eine Rekursionsformel für die Anzahl F_n der im Monat n neugeborenen Kaninchenpaare. Man starte mit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

b) Bestimmen Sie das allgemeine Glied F_n nach folgender Anleitung:

1. Setzen Sie $x^{(n)} = \binom{F_n}{F_{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$. Die Zuordnung $x^{(n)} \longmapsto x^{(n+1)}$ ist eine lineare Abbildung. Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A.
2. Die Zuordnung $x^{(0)} \longmapsto x^{(n)}$ ist auch eine lineare Abbildung. Sie wird beschrieben durch die Abbildungsmatrix A^n. Berechnen Sie den Vektor $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$ und geben Sie F_n an.

c) Man bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$