

## Serie 12

Die Aufgaben 1–3 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 24. Mai um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

**1.** Welche Dimension hat der Lösungsraums des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned}y_1'' &= y_1 + y_2' \\ y_2'' &= y_1'\end{aligned}$$

- (a) 2
- (b) 3
- (c) 5
- (d) 6

**2.** Für die Wronski-Determinante  $W$  zweier reeller Funktionen  $\phi_1, \phi_2$  gelte  $W(0) = 1$  und  $W(1) = -1$ . Jemand behauptet,  $(\phi_1, \phi_2)$  sei die Basis des Lösungsraums einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung. Kann diese Behauptung zutreffen?

- (a) Ja.
- (b) Nein.

**3.** Seien  $S_I$  und  $S_H$  die Lösungsräume einer linearen, (echt) inhomogenen und der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (a)  $S_H \cap S_I$  ist leer.
- (b)  $S_H \cap S_I = \{0\}$ .
- (c)  $S_H \cap S_I$  ist ein Vektorraum.

**4.**

- a) Man verwandle das lineare System zweiter Ordnung für die Funktionen  $y(x)$  und  $z(x)$

$$\begin{aligned}y'' &= xy + y' + e^x z \\z'' &= y - x^2 y' + \sin(x) z'\end{aligned}$$

in ein lineares System 1. Ordnung.

- b) Welche Dimension hat der Lösungsraum?

**5. Der angeregte harmonische Oszillator:**

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

beschreibt einen periodisch angeregten harmonischen Oszillator mit der Grundfrequenz  $\omega \neq 1$  und  $\omega \neq 0$ .

- a) Man bestimme eine Basis des Lösungsraums des homogenen Systems.  
*Hinweis:* Siehe Folien zur Vorlesung vom 18. Mai.

- b) Man bestimme eine partikuläre Lösung.

*Hinweis:* Ansatz  $Y(t) = c \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ .

- c) Man bestimme die allgemeine Lösung des angeregten Systems.

**6. Der gedämpfte harmonische Oszillator:**

$$y'' = -\omega^2 y - y'$$

beschreibt einen durch Reibung gedämpften harmonischen Oszillator bei unterkritischer Dämpfung (d.h.  $\omega > \frac{1}{2}$ ).

- a) Man bestimme eine Basis des Lösungsraums.

- b) Man berechne die Wronski-Determinante für die gewählte Basis.

- c) Man gebe die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung 2. Ordnung an.