D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2019

Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 13

Die schriftlichen Aufgaben können Sie bis spätestens **Freitag, den 31. Mai um 14:00 Uhr** im entsprechenden Fach im **HG J 68** abgeben. Sie können diese Serie während der Ferienpräsenz diskutieren.

---

1. Sei

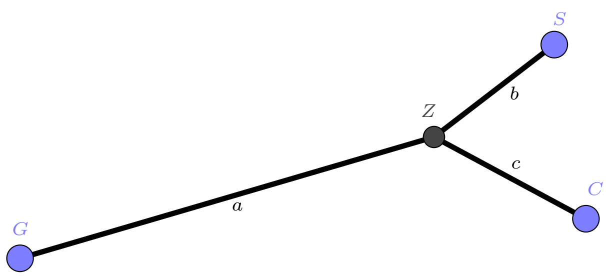
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme mit Hilfe von Matlab die Jordan-Normalform von A.

(b) Man berechne (von Hand) A^n für $n \in \mathbb{N}$.

2. Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:

Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118



Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht und interessiert sich nun für die tatsächlichen Distanzen a, b, c.

(a) Bestimmen Sie für ihn die ausgeglichenen Werte für die Längen a, b, c der Teilstrecken durch Lösen der Normalgleichungen.

(b) (i) Bestimmen Sie a, b, c mit Hilfe der QR–Zerlegung in Matlab.
Hinweis: In Matlab liefert der Befehl `[q,r] = qr(A)` die QR–Zerlegung der Matrix `A`.

(ii) Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit dem '\'–Operator in Matlab.

3. Gegeben sei ein Gleichungssystem mit dem reellen Parameter α:

$$\begin{array}{rcrcrcr} (2-\alpha)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & -4x_2 & - & (2-\alpha)x_3 & = & -4 \\ & & (3-\alpha)x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Für welche α besitzt dieses Gleichungssystem genau eine, unendlich viele, keine Lösung? Zu denjenigen α, für die das Gleichungssystem lösbar ist, bestimme man die Lösungsmenge.

4. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -7 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis für Kern A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis für Bild A.

(c) Konstruieren Sie aus den Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; a^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ (bzgl. des Standardskalarproduktes), indem Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren verwenden.

5. Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -1+\alpha \\ 3 & 3\alpha & 3+\beta \\ 2 & 2\beta & 2+\alpha \end{pmatrix}, \text{ wobei } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist B invertierbar?

(b) Berechnen Sie B^{-1} für $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

(c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass 0 ein Eigenwert von B ist mit geometrischer Vielfachheit 2.

6. Gegeben sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu A.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A^4.

7. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & 4 & 6 \\ 3 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume von A. Geben Sie jeweils die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

(b) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = T^{-1}AT$ gilt.

8.

(a) Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h., bestimmen Sie eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass
$$T^{-1}AT = D.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y} = Ay$$

mit der Koeffizientenmatrix A aus Teil a) zu den Anfangsbedingungen

$$y_1(0) = 3, \; y_2(0) = 5, \; y_3(0) = -2.$$

9. Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Sei $\mathcal{A} = \left\{a^{(1)} := 1,\ a^{(2)} := 1 + 2x,\ a^{(3)} := x^2 + x - 1\right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis von $\mathcal{P}_2$ ist.

(b) Sei $p(x) := 5x^2 + x - 3$. Schreiben Sie $p(x)$ in den Koordinaten der Basis $\mathcal{A}$.

(c) Bestimmen Sie alle Vektoren aus $\mathcal{P}_2$, welche bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

senkrecht auf $a^{(1)}$ stehen.

(d) Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{P}_2$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle . , . \rangle$.

10. Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3. Gegeben sei folgende Abbildung:

$$\mathcal{F} : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}_3 & \to & \mathcal{P}_3 \\ p(x) & \mapsto & p''(x) + xp'(x) \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2, x^3\}$.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix B von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2 := \{1 + x^3, x - x^2, x^2 + x^3, x^3\}$.

11. Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der reelle Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume von V sind und geben Sie allenfalls eine Basis an:

(a) $U = \left\{A \in V \,\middle|\, A^\top = A\right\}$

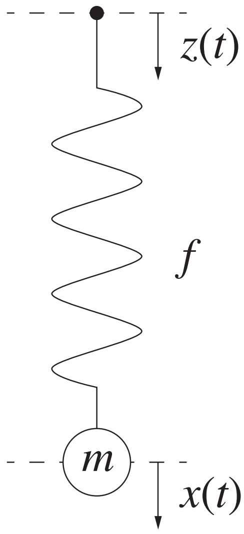
(b) $W = \left\{A \in V \,\middle|\, \det(A) = 0\right\}$

(c) $Y = \left\{A \in V \,\middle|\, A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 0\right\}$

12. Eine Masse m hängt an einer Feder mit Federkonstante f. Der Aufhängepunkt wird gemäss $z(t) = z_0 \cos(\omega t)$ aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Die resultierende Auslenkung der Masse aus ihrer Ruheposition sei $x(t)$. Wir nehmen an, die Reibung sei proportional zur Geschwindigkeit $x'(t)$. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$mx''(t) = -f(x(t) - z(t)) - bx'(t).$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Dämpfung durch die Reibung unterkritisch ist, d.h. $0 < b < 2\sqrt{fm}$.



(a) Man finde eine Basis des Lösungsraums der homogenen Gleichung.

(b) Man bestimme eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Hinweis: Man rechne komplex.

(c) Man bestimme das Schwingungsverhalten nach langer Zeit, d.h. nach Abklingen des Einschwingvorgangs.

(d) Man diskutiere das Resonanzverhalten, d.h. die Amplitude und die Phasenverschiebung

- bei sehr niedriger Anregungsfrequenz ω;
- bei sehr hoher Anregungsfrequenz ω;
- im Resonanzfall (bei maximaler Amplitude).

13. Wir betrachten den Unterraum $C_0^2([0,\pi]) := \{f \in C^2([0,\pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\}$ von $C^2([0,\pi])$ und die lineare Abbildung

$$A : C_0^2([0,\pi]) \to C([0,\pi]), f \mapsto f''.$$

(a) Man bestimme die Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\phi \in C_0^2([0,\pi])$ (Eigenfunktionen) von A, d.h. $A\phi = \lambda\phi$.

(b) Man zeige, dass A bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$$

für $f, g \in C_0^2([0,\pi])$ symmetrisch ist, d.h. $\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$, und schliesse daraus, dass die Eigenfunktionen von A ein orthogonales System bilden.

(c) Man normiere die in a) gefundenen Eigenfunktionen und stelle die Funktion $f(x) = x$ in der so gefundenen Eigenbasis von A dar.