

2.1. Supremum und Infimum V Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $A + B$ beschränkt ist und, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$. Gilt auch $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$?

Lösung: Da A (bzw. B) beschränkt ist gibt es eine obere Schranke $C_A \in \mathbb{R}$ (bzw. $C_B \in \mathbb{R}$). Offensichtlich ist $C_A + C_B$ eine obere Schranke für $A + B$. Ebenso sieht man, dass $A + B$ eine untere Schranke besitzt. Damit ist $A + B$ beschränkt. Aus

$$\begin{aligned} a &\leq \sup(A) \quad \forall a \in A \\ b &\leq \sup(B) \quad \forall b \in B \end{aligned}$$

folgt, dass $\sup(A) + \sup(B)$ eine obere Schranke für $A + B$ ist. Damit folgt

$$\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B).$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu sehen, sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen der Definition von \sup gibt es $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$, so dass

$$\begin{aligned} \sup(A) - \frac{\epsilon}{2} &\leq a_0 \\ \sup(B) - \frac{\epsilon}{2} &\leq b_0. \end{aligned}$$

Damit folgt,

$$\sup(A) + \sup(B) - \epsilon = \sup(A) - \frac{\epsilon}{2} + \sup(B) - \frac{\epsilon}{2} \leq a_0 + b_0 \leq \sup(A + B).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus, dass $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$. Ebenso sieht man, dass $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

2.2. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Seien (a_n) , (b_n) und (c_n) Folgen in \mathbb{R} mit $c_n = a_n + b_n$. Dann:

falls $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n;$$

falls $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

- falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein.
- falls (c_n) konvergiert, konvergiert wenigstens eine der Folgen (a_n) und (b_n) ;
- (b) Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R} . Dann
- falls $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass
- $$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
- gilt, dann konvergiert (a_n) ;
- falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ konvergent;
- falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent;
- falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$, und $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist (a_n) konvergent.
- (c) Sei $a_n = \frac{1}{n^2+1}$. Dann gilt $|a_n| < 0.01$:
- sobald $n \geq 9$,
- sobald $n > 9$,
- sobald $n > 10$,
- nie, so lange $n \leq 10$.

2.3. Folgen Man untersuche folgende reelle Folgen jeweils auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right),$$

$$b_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n},$$

$$c_n = \sqrt{n(n+2)} - n,$$

$$d_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2},$$

$$e_n = \frac{e_{n-1} + e_{n-2}}{2}, \quad e_1 = 0, \quad e_2 = 1.$$

Hinweis. Finden Sie eine explizite Formel für die Differenzen $F_n := f_n - f_{n-1}$.

Lösung: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn es gilt $|a_n| = |\cos(\frac{\pi}{3}n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner gilt $a_{6k} = \cos(2\pi k) = 1$ und $a_{6k+3} = \cos(2\pi k + \pi) = -1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Folglich ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht monoton und nicht konvergent.

Die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen 0, denn

$$b_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}}.$$

Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton wachsend und konvergiert gegen 1, denn

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{n(n+2)} - n = \frac{(\sqrt{n(n+2)} - n)(\sqrt{n(n+2)} + n)}{\sqrt{n(n+2)} + n} \\ &= \frac{n(n+2) - n^2}{\sqrt{n(n+2)} + n} = \frac{2n}{\sqrt{n(n+2)} + n} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton fallend und konvergiert gegen $\frac{1}{2}$, denn

$$d_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Das Rekursionsgesetz $e_1 = 0$, $e_2 = 1$, $e_n = \frac{1}{2}(e_{n-1} + e_{n-2})$ für $3 \leq n \in \mathbb{N}$ impliziert

$$E_n := e_n - e_{n-1} = \frac{1}{2}(e_{n-1} + e_{n-2}) - e_{n-1} = \frac{1}{2}(-e_{n-1} + e_{n-2}) = -\frac{1}{2}E_{n-1}.$$

Es folgt

$$E_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} E_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} (e_3 - e_2) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

Das Folgenglied e_n für $n \geq 3$ lässt sich schreiben als Teleskopsumme

$$\begin{aligned} e_n &= e_2 + \sum_{k=3}^n (e_k - e_{k-1}) = 1 + \sum_{k=3}^n E_k = 1 + \sum_{k=3}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^l = \sum_{l=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^l = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

wobei zuletzt die Formel der geometrischen Reihe verwendet wird. Damit ist die Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und konvergiert gegen $\frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$, ist aber nicht monoton.

2.4. Fibonacci (schriftlich) Die reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Beweisen Sie folgende explizite Formel durch vollständige Induktion.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Lösung: Es sei $\Phi := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $\Psi := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Zu beweisen ist $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n)$. Man beachte, dass a_{n+2} sowohl von a_{n+1} als auch a_n abhängt. Die vollständige Induktion muss daher bei $n = 1$ und $n = 2$ verankert werden und der Induktionsschritt schliesst von n und $n + 1$ auf $n + 2$.

Verankerung. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^1 - \Psi^1) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1 = a_1, \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^2 - \Psi^2) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} - \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4\sqrt{5}}{4}\right) = 1 = a_2.\end{aligned}$$

Induktionsannahme. Für gewisses $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n), \quad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}).$$

Induktionsschritt. Wir folgern die Behauptung für $n + 2$. Es gilt

$$\begin{aligned}a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}) \quad (\text{Induktionsannahme}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n(1 + \Phi) - \Psi^n(1 + \Psi)).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, falls $(1 + \Phi) = \Phi^2$ und $(1 + \Psi) = \Psi^2$ gilt. In der Tat ist

$$\begin{aligned}\Phi^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \Phi + 1, \\ \Psi^2 &= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \Psi + 1.\end{aligned}$$

Somit ist wie behauptet $a_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^{n+2} - \Psi^{n+2})$.

(b) Zeigen Sie, dass $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen die goldene Zahl $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

Lösung: Aus der expliziten Formel bewiesen in der vorherigen Aufgabe folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}|b_m - \Phi| &= \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} - \Phi \right| = \left| \frac{\Phi^{m+1} - \Psi^{m+1}}{\Phi^m - \Psi^m} - \Phi \right| \\ &= \left| \frac{\Phi\Psi^m - \Psi^{m+1}}{\Phi^m - \Psi^m} \right| = \left| \frac{\Phi - \Psi}{\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)^m - 1} \right| \leq \frac{\sqrt{5}}{\left|\frac{\Phi}{\Psi}\right|^m - 1},\end{aligned}$$

wobei $\Phi - \Psi = \sqrt{5}$ und $\left|\left(\frac{\Phi}{\Psi}\right)^m - 1\right| \geq \left|\frac{\Phi}{\Psi}\right|^m - 1$ verwendet wird.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Dann folgt aus der vorherigen Abschätzung

$$\begin{aligned} |b_m - \Phi| < \varepsilon &\Leftrightarrow \sqrt{5} < \varepsilon \left(\left| \frac{\Phi}{\Psi} \right|^m - 1 \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{5} + 1 < \left| \frac{\Phi}{\Psi} \right|^m \\ &\Leftrightarrow \log \left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{5} + 1 \right) < m \log \left| \frac{\Phi}{\Psi} \right| \\ &\Leftrightarrow m > \frac{\log \left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{5} + 1 \right)}{\log \left| \frac{\Phi}{\Psi} \right|} =: N(\varepsilon). \end{aligned}$$

Es sei $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ die Zahl $N(\varepsilon)$ aufgerundet. Somit existiert für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sodass $|b_m - \Phi| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $m \geq n(\varepsilon)$ folgt. Das heisst nach Definition, dass die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Φ konvergiert.

(c) Finden Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass folgende Aussage gilt.

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq n : \left| b_m - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| \leq \frac{1}{100}.$$

Lösung: Gesucht ist die Zahl $n(\varepsilon)$ aus Teilaufgabe (b) für $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Also berechnen wir

$$N\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{\log(100\sqrt{5} + 1)}{\log \left| \frac{\Phi}{\Psi} \right|} = \frac{\log(100\sqrt{5} + 1)}{\log \left| \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} \right|} \approx 5.625746.$$

Es folgt $n(\frac{1}{100}) = 5$, das heisst für alle natürlichen Zahlen $m > 5$ gilt $|b_m - \Phi| < \frac{1}{100}$.

2.5. Beschränkte Folgen Sei A ein Algorithmus dessen Input eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist und dessen Arbeitszeit für Input n gleich $a_n \geq 0$ ist. Wir nehmen an, dass

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass

$$a_n \leq Cn \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lösung: Wegen unserer Annahme haben wir

$$\begin{aligned} a_n &= \underbrace{a_1 + 1 + 1 + \dots + 1}_n \leq \underbrace{a_1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n-1} + a_1 \\ &\leq \underbrace{a_1 + 1 + \dots + 1}_{n-2} + a_1 + a_1 \\ &\vdots \\ &\leq \underbrace{a_1 + \dots + a_1}_n = na_1. \end{aligned}$$

Somit können wir also $C = a_1$ nehmen.