3.1. Cauchy-Kriterium Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen, sodass

$$|q_n - q_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Folgt daraus, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist? Finden Sie ein Gegenbeispiel oder beweisen Sie die Behauptung.

Lösung: $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Definition eine Cauchy-Folge, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Es genügt *nicht*, dass $|q_n - q_{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt.

$$q_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Dann ist $q_n \in \mathbb{Q}$ und es gilt $|q_n - q_{n+1}| = |-\frac{1}{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$, aber $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge, denn

$$q_{2n} - q_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

3.2. Induktive Folge

(a) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$a_1 = \sqrt{2},$$
$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(i) Beweisen Sie, dass $(a_n)_n$ von oben durch 2 beschränkt ist.

(ii) Berechnen Sie, falls existent, den Grenzwert von $(a_n)_n$.

Lösung: Wir erinnern uns daran, dass die Wurzel $x \mapsto \sqrt{x}$ monoton wachsend ist, das heisst, falls $0 \leq x \leq y$, dann $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$. Insbesondere gilt, für alle $x, y \geq 0$, immer $\sqrt{x+y} \geq \sqrt{x}$.

(i) Wir sehen, dass

$$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \leq \sqrt{4} = 2,$$
$$a_3 = \sqrt{2 + a_1} \leq \sqrt{2 + 2} \leq 2,$$
$$a_4 = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2,$$
$$\ldots$$

also wollen wir durch Induktion beweisen, dass $a_n \leq 2$ für alle n gilt.

Verankerung: für $n = 1$, $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.

Induktionsschritt: nehmen wir an, dass $a_n \leq 2$. Dann gilt:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2,$$

da die Wurzelfunktion monoton wachsend ist. Dies zeigt, dass die Folge beschränkt ist.

(ii) Wir benutzen nochmals Induktion um zu beweisen, dass die Folge monoton wachsend ist.

Verankerung: für $n = 2$, $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geq \sqrt{2} = a_0$.

Induktionsschritt: nehmen wir an, dass $a_n \geq a_{n-1}$. Dann sehen wir, dass

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \geq \sqrt{2 + a_{n-1}} = a_n,$$

wie gewollt. Wir haben bewiesen, dass $(a_n)_n$ beschränkt und wachsend ist: durch Satz 3.3.1 (Monotone Konvergenz) in Struwes Skript folgern wir, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ existiert. Weil $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, schliessen wir durch Satz 3.3.2 in Struwes Skript, dass

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n+1} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + a},$$

also

$$a^2 - 2 - a = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung 2. Ordnung sind 2 und -1: weil immer $a_n > 0$ gilt, ist dann nur $a = 2$ relevant. Schlussendlich erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}} = 2.$$

(b) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= \frac{a_n}{a_n + 1} \quad \text{für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tipp: Induktive Folge untersucht man mit Induktion.

Lösung: Wir sehen, dass

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \\ a_3 &= \frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1}{3}, \\ a_4 &= \frac{1/3}{1+1/3} = \frac{1}{4}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Also ist es "klar" das die Grenzwert 0 ist. Aber wir müssen dies streng beweisen! Die Strategie ist wie in (a): wir zeigen, dass die Folge beschränkt und monoton fallend ist, um Satz 3.3.1 in Struwes Skript zu benutzen. Weil $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n/(1+a_n)$, folgt

$$0 \leq a_n \leq 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} \leq a_n,$$

weil der Nenner immer grösser ist als der Zähler. Das zeigt Beschränktkeit und Monotonie. Wir schliessen, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert und gilt

$$a = \frac{a}{1+a} \Leftrightarrow a^2 + a = a \Leftrightarrow a = 0.$$

3.3. MC Frage: Konvergenz und absolute Konvergenz Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☑ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergiert absolut falls beide Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergent sind.

Richtig: Wegen $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$ haben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < +\infty.$$

Somit ist $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ absolut konvergent.

☑ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ existiert, falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

absolut konvergent sind.

Richtig: Da $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ ist haben wir

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\ n \geq N : \quad |a_n| \leq 1.$$

Nun folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=0}^{N} |a_n b_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n b_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

Somit ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ sogar absolut konvergent.

☐ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ existiert, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert.

Falsch: Seien $a_0 := 1$, $a_1 := -1$ und

$$a_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad a_{2n+1} = -\frac{1}{2n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{falls } N \text{ gerade ist} \\ 0 & \text{falls } N \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$$

Da aber $a_0 = 1$, $-a_1 = 1$ und

$$(-1)^{2n} a_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = \frac{1}{2n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

existiert $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ nicht.

3.4. MC-Fragen: Reihen und Cauchy-Folgen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern, d.h. $a_n \geq 0$ für jedes n. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass die Reihe divergiert?

☐ $a_n \geq 1/n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;

Ungenügend: zum Beispiel betrachten wir

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{falls } n \text{ Zweierpotenz,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In anderen Worten: falls $n = 2^k$ für ein k, dann $a_n = 2^{-k}$, falls n nicht Zweierpotenz, ist $a_n = 0$. Es gilt $a_n = 1/n$ für jedes n Zweierpotenz, also undendliche n, aber es gilt auch für jedes n, dass $a_n \leq 2^{-n}$, also ist die Reihe absolut konvergent.

☐ $a_n > 2^{-n}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;

Ungenügend: die Reihe mit Gliedern $a_n = 2 \cdot 2^{-n}$ ist absolut konvergent.

☑ es existiert $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \geq 1/\sqrt{n}$ für jedes $n \geq N_0$.

Lösung: $\sum_{N=N_0}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ ist divergent, also weil

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N_0-1} a_n}_{\text{bestimmte Zahl}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{N_0-1} a_n + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gilt, ist die Reihe divergent.

(b) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann

☐ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$;

Falsch: zum Beispiel ist $x_n = 1/n$ Cauchy (weil konvergent), aber wie bekannt ist $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent.

☐ konvergiert $(x_n)_n$ gegen 0;

Falsch: jede Cauchy-Folge ist konvergent, nicht notwendigerweise mit Grenzwert 0.

☑ ist x_n beschränkt.

Lösung: jede Cauchy-Folge ist konvergent, also beschränkt.

3.5. Annäherung Sei $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass

$$a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

existiert. Sei

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Beweisen Sie, dass

$$|a - s_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Lösung: Wir haben

$$\begin{aligned} s_{n+l} - s_n &= \sum_{k=1}^{n+l} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{n+l} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+3} + \frac{(-1)^{n+3}}{n+4} + \dots + \frac{(-1)^{n+l-1}}{n+l} \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \dots + (-1)^{l-1} \frac{1}{n+l} \right). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} (-1)^n (s_{n+l} - s_n) &= \frac{1}{n+1} \underbrace{- \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}}_{\leq 0} \underbrace{- \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5}}_{\leq 0} - \dots \underbrace{+ (-1)^{l-1} \frac{1}{n+l}}_{\leq 0} \\ &\leq \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Anderseits gilt auch

$$\begin{aligned} (-1)^n (s_{n+l} - s_n) &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} - \dots + (-1)^{l-1} \frac{1}{n+l} \\ &\geq -\frac{1}{n+2} + \underbrace{\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{n+5}}_{\geq 0} - \dots \underbrace{+ (-1)^{l-1} \frac{1}{n+l}}_{\geq 0} \\ &\geq -\frac{1}{n+2} \geq -\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$|s_{n+l} - s_n| \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Somit folgt

$$|a - s_n| = \lim_{l \to \infty} |s_{n+l} - s_n| \leq \frac{1}{n+1},$$

was die Behauptung zeigt.