### 4.1. MC Frage: Umordnung der Reihe

Sei $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $\phi$ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

  *Falsch: Gegenbeispiel:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \Big(-\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{3} + \Big(-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{4} + \Big(-\frac{1}{4}\Big) + ...$$

  *konvergent aber*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+(-1)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\Big(-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\Big(-\frac{1}{3}\Big)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\Big(-\frac{1}{4}\Big)+...$$

  *nicht konvergent*

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $\phi$ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

  *Falsch: Gegenbeispiel:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \Big(-\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{3} + \Big(-\frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{4} + \Big(-\frac{1}{4}\Big) + ...$$

  *konvergent aber*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$$

  *nicht konvergent*

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent absolut und $\phi$ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

  *Falsch: Gegenbeispiel:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$$

  *absolut konvergent aber*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+...$$

  *nicht konvergent*

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent absolut und $\phi$ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

  *Richtig: Eine Teilfolge oder eine Umordnung der absolut konvergent Reihe ist auch absolut konvergent.*

**4.2. MC-Fragen: Konvergenz** Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

- ☐ konvergiert nicht;
- ☐ ist konvergent aber nicht absolut konvergent;
- ☐ konvergiert absolut.(Richtig)

**Lösung:** Wir haben

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{(n+1)}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 2$$

haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{e} < 1$$

**4.3. MC Frage: Umordnung der Reihe** Sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine Reihe und $\alpha > 0$. Definiere:

$$a_n = c_n \alpha^n$$
$$b_n = n c_n \alpha^{n-1}$$

Welche Aussage trifft zu?

- ☐

$$\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} > \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$$

- ☐

$$\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} < \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$$

☐

$$\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |b_n|^{1/n}$$

(Richtig)

☐ Die Informationen genügen nicht um zu schliessen.

**Lösung:**

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} |b_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_{n-1}|}\alpha^{1-1/n} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|}\alpha^{1-1/n} \\ &= \alpha \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \\ &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\end{aligned}$$

**4.4. Umordnung der Reihe** Zeige, dass das Cauchy Product der divergenten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ...$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ...$$

absolut konvergiert.

**Lösung:**

Zeigen sie dass

$$2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n = 2^{n+1}$$

und dann

$$\sum_{j=1}^{n} a_{n-j} b_j = 0 \quad \text{wenn} \quad n \geq 2$$