5.1. MC Fragen: Stetigkeit einer Funktion Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) \neq 1$, so dass f in $x_0 = 0$ stetig ist. Dann

☐ existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass falls $0 < |x| < \delta$, gilt $|f(x) - 1| > \epsilon$;

Falsch:
ein Gegenbeispiel ist gegeben durch die konstante Funktion $f(x) \equiv 2$ und $\epsilon = 3$.

☐ für jede Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1$.

Richtig:
der Satz besagt, dass eine Folge $(x_n)_n$ existiert, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1$. Die Definition vom Grenzwert mit Folgen lautet:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \iff \textit{für jede Folge } (x_n)_n \textit{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \textit{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1,$$

also ist ihre Negation:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1 \iff \textit{es existiert eine Folge } (x_n)_n \textit{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \textit{ s.d. } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1.$$

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Falsch.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann

☐ $\frac{f(x)}{x}$ in $x_0 = 2$ stetig ist $\implies f$ ist stetig in $x_0 = 2$;

Richtig:
Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist an der Stelle 2 beschränkt und stetig, also existiert $\lim_{x\to 2} f(x)/x$ genau dann, wenn $\lim_{x\to 2} f(x)$ existiert, und muss

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{2}$$

sein.

☐ Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\overline{n} \in \mathbb{N}$, so dass $|f(2 - 1/n) - f(2)| < \epsilon$ für jedes $n \geq \overline{n}$ $\implies f$ ist stetig in $x_0 = 2$;

Falsch:
Das zeigt nur, dass für die Folge $x_n = 2 - 1/n$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(2)$ gilt; die Definition vom Grenzwert mit Folgen erfordert, dass für jede Folge $(x_n)_n$, die Grenzwert 2 hat, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(2)$ gilt.

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Falsch.

(c) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $I \subset \mathbb{R}$. Dann

☐ I abgeschlossen $\implies f$ beschränkt;

Falsch:
Gegenbeispiel:$\mathbb{R}$ *ist abgeschlossen.* $f(x) = x$ *ist stetig aber nicht beschränkt.*

☐ I beschränkt $\implies f$ beschränkt;

Falsch:
Gegenbeispiel:$(0, 1)$ *ist beschränkt.* $f(x) = 1/x : (0, 1) \to \mathbb{R}$ *ist stetig aber nicht beschränkt.*

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Richtig.

5.2. (schriftlich) Definition von Stetigkeit Seien zwei Intervalle durch

$$I_1 = [a, b], \quad I_2 = [b, c]$$

gegeben mit $a < b < c$ und seien

$$f_1 : I_1 \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f_2 : I_2 \to \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [a, c] \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in [a, b[, \\ f_2(x) & x \in [b, c] \end{cases}$$

genau dann stetig ist, wenn $f_1(b) = f_2(b)$

Lösung:

Wenn $f_1(b) = f_2(b)$, zeigen dass f stetig in $x_0 = b$ ist, i.e.

Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für alle $x \in [a, c]$

$$|x - b| < \delta \implies |f(x) - f(b)| < \epsilon$$

Wenn $f_1(b) \neq f_2(b)$, zeigen dass f nicht stetig in $x_0 = 2$ ist, i.e.

Wir benutzen $\epsilon = \frac{|f_1(b) - f_2(b)|}{2} > 0$. Weil f_1 stetig ist, $\exists \delta > 0$ so dass

$$|f_1(x) - f_1(b)| < \epsilon \quad \forall x \in [b - \delta, b]$$

Dann wenn $x \in [b - \delta, b[$,

$$|f(x) - f(b)| = |f_1(x) - f_2(b)| \geq |f_1(b) - f_2(b)| - |f_1(x) - f_1(b)| > \epsilon$$

Dann folgt dass f nicht stetig in $x_0 = 2$ ist.