6.1. MC Fragen

(a) Wählen Sie die richtigen Antworten.

☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht stetig $\implies f \circ g$ ist nicht stetig;

Falsch:
ein Gegenbeispiel ist gegeben durch eine konstante Funktion f.

☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht stetig $\implies g \circ f$ ist nicht stetig;

Falsch:
ein Gegenbeispiel ist gegeben durch eine konstante Funktion f.

☐ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht stetig $\implies f \circ g$ ist nicht stetig;

Falsch:
ein Gegenbeispiel:

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, +\infty), \\ 0 & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch. (right)

Richtig.

(b) Wählen Sie die richtigen Antworten.

☐ $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{|x|^2}) & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$ ist stetig;

Richtig:
f ist stetig in $x_0 = 0$, i.e. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ mit $|f(x)| < \epsilon$ falls $|x| < \delta$.

☐ $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$;

Richtig:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = 1$$

☐ $f(x) = \exp(|\ln x|) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ist monoton;

Falsch:
$f(e) = f(e^{-1}) = e,\ f(1) = 1$.

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Falsch.

(c) Wählen Sie die richtigen Antworten.

☐ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig $\Longrightarrow h(x):=\frac{f(x)}{1+|g(x)|}$ ist stetig;

Richtig:
$h_1(x):=\frac{1}{1+|x|}$ *und* g *sind stetig* $\Longrightarrow h_2(x):=h_1\circ g=\frac{1}{1+|g(x)|}$ *ist stetig. Zeige, dass das Produkt von zwei stetigen Funktionen stetig ist. Dann* $h=f\cdot h_2$ *ist stetig.*

☐ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig $\Longrightarrow h(x):=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)^n$ ist stetig;

Richtig:
$h(x)=\exp(f(x))=\exp\circ f$. $\exp$ *und* f *sind stetig* $\Longrightarrow h$ *ist stetig.*

☐ $f:(-1,1)\to(-1,1)$ nicht stetig $\Longrightarrow h(x):=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)^{n^2}$ ist nicht stetig;

Falsch:

$$|\exp f(x)|<1\Longrightarrow h(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)^n\right]^n=\lim_{n\to\infty}(\exp f(x))^n=0$$

Dann wir haben ein Gegenbeispiel:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4} & x\in(-1,0],\\ -\frac{1}{2} & x\in(0,1)\end{cases}$$

☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

Falsch.

(d) $I:=(1,2)\cup(3,4)\cup(5,6)\subset\mathbb{R}$. Wählen Sie die richtigen Antworten.

☐ $f:I\to\mathbb{R}$ stetig und injektiv $\Longrightarrow f$ ist monoton;

Falsch:
ein Gegenbeispiel:

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in(1,2),\\ 7-x & x\in(3,4)\\ x & x\in(5,6)\end{cases}$$

- ☐ $f : I \to \mathbb{R}$ strong monoton $\Longrightarrow f$ ist bijektiv;

  Falsch:
  ein Gegenbeispiel: $f(x) = x : (1,2) \cup (3,4) \cup (5,6) \to \mathbb{R}$ *ist nicht surjektiv.*

- ☐ $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und monoton $\Longrightarrow f^{-1} : \mathbb{R} \to I$ existiert und ist stetig;

  Falsch:
  ein Gegenbeispiel: $f(x) = 1$ *hat kein* f^{-1}.

- ☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

  Richtig.

6.2. Trigonometrische Funktion (schriftlich)

(a) Zeige, dass $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{1}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{2}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin y =& \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) \\
=& \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
& - \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
=& 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\cos x - \cos y$ ist ähnlich.

(b) Zeige dass $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ eine strong monoton stetige bijektive Abbildung ist.

Lösung: Wir haben (aus Zusammenfassungen der Vorlesung)

a) $\forall x \in (0, \pi), \sin x > 0$

b) $\sin \frac{\pi}{2} = 1, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin 0 = \sin \pi = 0$

Dann

$$(1) \Longrightarrow \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \Longrightarrow \cos x > 0 \text{ wenn } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Dann

a) $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \cos x > 0$

b) $\cos 0 = 1, \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

strong monoton: $\forall -\frac{\pi}{2} \leq y < x \leq \frac{\pi}{2},\ \frac{x-y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0$$

stetig: Satz III.41 in Zusammenfassungen der Vorlesung

bijektiv:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \sin\frac{\pi}{2} = 1, \sin \text{ ist stetig und strong monoton auf } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\Longrightarrow \sin \text{ ist bijektiv (Zwischenwertsatz)}$$

(c) Zeige für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq x \leq \sqrt{(4k+5)(4k+6)}$ gilt:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... - \frac{x^{2(2k+1)}}{[2(2k+1)]!}$$

Lösung: Notieren dass, die Reihe cos konvergiert gleichmässig.

$$\cos x - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... - \frac{x^{2(2k+1)}}{[2(2k+1)]!}\right] = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^{4(k+l)}}{[4(k+l)]!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{[4(k+l)+2]!}$$

und

$$x \leq \sqrt{(4(k+l)+1)(4(k+l)+2)} \Longrightarrow \frac{x^{4(k+l)}}{[4(k+l)]!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{[4(k+l)+2]!} \geq 0$$

Dann

$$0 \leq x \leq \sqrt{(4k+5)(4k+6)} \Longrightarrow \frac{x^{4(k+l)}}{[4(k+l)]!} - \frac{x^{4(k+l)+2}}{[4(k+l)+2]!} \geq 0 \quad \forall l \geq 1$$