7.1. Trigonometrische Funktion

(a) Zeigen Sie,

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Beweis. Wir haben

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \text{ und } \sin(\pi - x) = \sin x \text{ und } \sin(2x) = 2\sin x\cos x$$

Dann

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$$

Weil $\sin\frac{\pi}{3} > 0$,

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

□

(b) Zeigen Sie,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y} \quad \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y} \quad \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Beweis. Wenn $x, y \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $x+y, x-y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dann

$$\cos x, \cos y, \cos(x+y), \cos(x-y) > 0$$

und

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\cos x\cos y - \sin x\sin y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\sin y}{\cos y}}$$

Die andern ist gleich. □

7.2. MC Fragen: Grenzwert einer Funktion Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1$. Dann

☐ existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass falls $0 < |x| < \delta$, gilt $|f(x) - 1| > \epsilon$;

Falsch: ein Gegenbeispiel ist gegeben durch die konstante Funktion $f(x) \equiv 2$ und $\epsilon = 3$.

☑ existieren $\epsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, so dass $|f(x_n) - 1| > \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

Richtig: der Satz besagt, dass eine Folge $(x_n)_n$ existiert, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1$. Die Definition vom Grenzwert mit Folgen lautet:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \iff \text{für jede Folge } (x_n)_n \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1,$$

also ist ihre Negation:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1 \iff \text{es existiert eine Folge } (x_n)_n \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \text{ s.d. } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1.$$

☐ für jede Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1$.

Falsch: ein Gegenbeispiel ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

weil für jede Folge rationaler Zahlen $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, aber bekanntlich existiert $\lim_{x\to 1} f(x)$ nicht.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass $\lim_{x\to 2} f(x) = \pi$?

☑ $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$;

Richtig: Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist an der Stelle 2 beschränkt und stetig, also existiert $\lim_{x\to 2} f(x)/x$ genau dann, wenn $\lim_{x\to 2} f(x)$ existiert, und muss

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{2}$$

sein.

☐ Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\overline{n} \in \mathbb{N}$, so dass $|f(2 - 1/n) - \pi| < \epsilon$ für jedes $n \geq \overline{n}$;

☐ $\lim_{n\to\infty} f(2-1/n) = \pi$.

Die zwei letzte Aussagen sind falsch: das zeigt nur, dass für die Folge $x_n = 2-1/n$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pi$ gilt; die Definition vom Grenzwert mit Folgen erfordert, dass für jede Folge $(x_n)_n$, die Grenzwert 2 hat, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pi$ gilt.

7.3. Wichtige Grenzwerte Berechnen Sie mithilfe der Potenzreihendarstellung von exp, sin und cos folgende Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, **(d)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

Bemerkung: Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Lösung: Wir benutzen die Tatsache (Satz 4.40 in Prof. Marc Burger Skript), dass eine Potenzreihe $\sum_n c_n z^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ (R darf auch gleich $+\infty$ sein), eine stetige Funktion definiert im Innern des Konvergenzkreises.

(a) Wie in der Vorlesung gesehen, hat $\sin x$ die folgende Potenzreihendarstellung:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Für $x \neq 0$ fixiert sehen wir, dass

$$\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Durch das Quotientenkriterium sehen wir, dass diese Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) absolut konvergent ist:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} = 0,$$

und ihr Wert in $x = 0$ ist 1. Daraus schliessen wir, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = 1.$$

(b) Wie in der Vorlesung gesehen, hat $\cos x$ die folgende Potenzreihendarstellung:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Für ein fixiertes $x \neq 0$, sehen wir wie in (a), dass

$$\frac{1}{x}\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}$$

absolut konvergent auf ganz $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist mit Wert 0, daraus schliessen wir

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

(c) Genau wie in (b) erhalten wir, dass für ein fixiertes $x \neq 0$, dass

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-2}}{2k!},$$

wobei die Reihe absolut konvergent auf ganz $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist. Ihr Wert in $x = 0$ ist $1/2$, also

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(d) Mit (a) erhalten wir, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\underbrace{\cos x}_{\to 1}} \right) = 1.$$

(e) Wie in (a) erhalten wir, aus der Potenzreihendarstellung

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

für $x \neq 0$, dass

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!},$$

und der Wert dieser absolut konvergenten Reihe an der Stelle 0 ist 1, also

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

7.4. Definition von Stetigkeit Bestimme die Konstanten α und β so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta & \text{falls } x \leq -1, \\ (\alpha + \beta)x & \text{falls } -1 < x < 1, \\ x^2 + \alpha x - \beta & \text{falls } x \geq 1, \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ wird und skizziere ihren Graph.

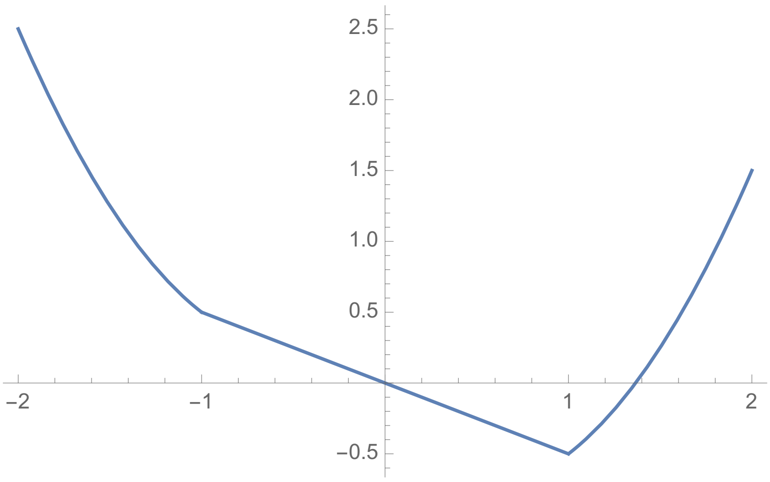
Lösung: *Die Funktionen $x \mapsto x^2 - \alpha x + \beta$, $x \mapsto x^2 + \alpha x - \beta$ und $x \mapsto (\alpha + \beta)x$ sind stetig.* Darum ist die Funktion f stetig ausserhalb der Punkte ± 1, und sie besitzt am Punkt $+1$ einen linksseitigen Grenzwert und am Punkt -1 einen rechtsseitigen Grenzwert. Damit sie an diesen Stellen stetig ist, muss noch gelten:

$$1 + \alpha + \beta \;=\; f(-1) \;\overset{!}{=}\; \lim_{x \to -1+} f(x) \;=\; \lim_{x \to -1+} (\alpha + \beta)x \;=\; -(\alpha + \beta),$$

und

$$1 + \alpha - \beta \;=\; f(1) \;\overset{!}{=}\; \lim_{x \to 1-} f(x) \;=\; \lim_{x \to 1-} (\alpha + \beta)x \;=\; \alpha + \beta.$$

Die zweite Gleichung ist äquivalent zu $\beta = \frac{1}{2}$, und nach Einsetzen dieses Wertes ist die erste Gleichung äquivalent zu $\alpha = -1$. Wir schliessen, dass f stetig auf ganze $\mathbb{R}$ ist genau dann wenn $\alpha = -1$ und $\beta = 1/2$. Der Graph von f ist dann:



7.5. Zwischenwertsatz

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Lösung: Zu zeigen: Die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ist bijektiv.

Wir wissen: Ein mit stetigen Funktionen gebildeter rationaler Ausdruck ist, soweit definiert, wieder stetig. Darum ist die Funktion $f(x)$ auf $(-1, 1)$ stetig. Als nächstes beachte, dass gilt:

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 1-} f(x) = +\infty,$$

denn in beiden Grenzwerten geht der Nenner $\sqrt{1-x^2}$ von oben gegen Null und der Zähler gegen -1, bzw. gegen 1. Insbesondere nimmt f für jede gegebene Zahl c sowohl Werte $> c$ als auch Werte $< c$ an. Aus der Stetigkeit und dem Zwischenwertsatz folgt daraus, dass f auch den Wert c selbst annimmt. Somit nimmt f jedes $c \in \mathbb{R}$ als Wert an, das heisst, f ist surjektiv.

Andererseits gilt

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}$$

für $0 < x < 1$. In diesem Bereich ist die Funktion $x \mapsto x^2$ streng monoton wachsend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ streng monoton fallend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$ streng monoton fallend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto f(x)$ streng monoton wachsend.
Ausserdem gilt in diesem Bereich $f(x) > 0 = f(0)$. Somit ist f streng monoton wachsend für $0 \leq x < 1$. Wegen $f(-x) = -f(x)$ folgt, dass f auch auf dem Bereich $-1 < x \leq 0$ streng monoton wachsend ist. Also ist f insgesamt streng monoton wachsend und daher injektiv.

Somit ist f sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv.

(b) Es sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $x \in [0, 1]$ derart, dass $f(x) = x$ gilt.

Lösung: Betrachten Sie die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - x$. Es gilt

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 0,$$

d.h. ein Punkt x is genau dann ein Fixpunkt von f, wenn er eine Nullstelle von g ist. Wir müssen daher zeigen, dass g immer eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ besitzt.

Als Differenz von zwei stetigen Funktionen ist g stetig.
Weil ausserdem $f(x) \in [0,1]$ für alle $x \in [0,1]$ gilt, ist

$$g(0) \geq 0 \geq g(1),$$

denn $g(0) = f(0) - 0 \geq 0 - 0 = 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$.
Da g stetig ist, gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [0,1]$ mit $g(x) = 0$ und somit $f(x) = x$.

(c) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$. Zeigen sie dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$ existiert, so dass $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

Lösung: Betrachte die stetige Funktion $g : [0, \frac{n-1}{n}] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{n})$. Wir müssen zeigen, dass g immer eine Nullstelle im Intervall $[0, \frac{n-1}{n}]$ besitzt. Wir zeigen diese Behauptung indirekt.
Nehmen wir an, dass $g(x) > 0$ für alle $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$. Dann gilt:

$$f(x + \tfrac{1}{n}) < f(x) \qquad \text{für alle } x \in [0, \tfrac{n-1}{n}].$$

Wählen wir sukzessiv $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$ und wenden die letzte Ungleichung an. Damit gilt:

$$0 = f(0) > f(\tfrac{1}{n}) > f(\tfrac{2}{n}) > \cdots > f(\tfrac{n-1}{n}) > f(1) = 0\ ,$$

was zu einen Widerspruch führt.
Analog falls $g(x) < 0$ für alle $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$. Dann gilt:

$$f(x) < f(x + \tfrac{1}{n}) \qquad \text{für alle } x \in [0, \tfrac{n-1}{n}].$$

Wählen wir sukzessiv $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$ und wenden wir die letzte Ungleichung an. Damit gilt:

$$0 = f(0) < f(\tfrac{1}{n}) < f(\tfrac{2}{n}) < \cdots < f(\tfrac{n-1}{n}) < f(1) = 0\ ,$$

was zu einen Widerspruch führt.
Somit besitzt g eine Nullstelle auf dem Intervall $[0, \frac{n-1}{n}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das impliziert unsere Behauptung.

7.6. Stetigkeit (schriftlich) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Zeigen Sie, mit dem Folgenkriterium, dass folgende Aussagen equivalent sind:

1. f ist in x_0 differenzierbar;
2. Es gibt eine Funkiton $\varphi : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ die stetig in x_0 ist und so dass:

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \quad x \in D$$

Lösung:

$1 \Longrightarrow 2$

Weil f in x_0 differenzierbar ist ($\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert), definieren wir eine Funktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \in D \backslash \{x_0\} \\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x = x_0 \end{cases}$$

Dann

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \quad x \in D$$

Für die Stetigkeit, f ist in x_0 differenzierbar $\Longrightarrow \varphi$ ist stetig in x_0.

$2 \Longrightarrow 1$

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \quad x \in D \Longrightarrow \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall x \in D \backslash \{x_0\}$$

Dann φ ist stetig in $x_0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert und

$$\varphi(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$