8.1. MC Fragen

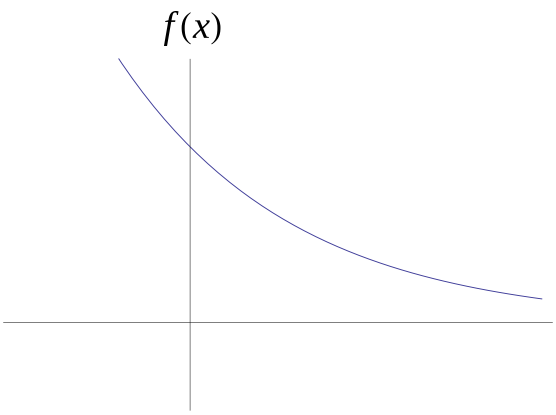
(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die differenzierbar auf $]a, b[$ ist, mit

$$f'(t) = 0 \quad \forall\ t \in]a, b[.$$

Dann gilt

- ☑ $f(t) = f(a)$ für alle $t \in [a, b]$.
- ☐ $f(t) < f(s)$ für alle $t < s$.
- ☐ $f(t) > f(s)$ für alle $t < s$.

(b) Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Was lässt sich über f, f' und f'' sagen?



- ☐ Nichts
- ☑ Die Funktion f ist positiv.
- ☐ Die Funktion f ist negativ.
- ☐ Die erste Ableitung f' ist positiv.
- ☑ Die erste Ableitung f' ist negativ
- ☑ Die zweite Ableitung f'' ist positiv.
- ☐ Die zweite Ableitung f'' ist negativ.

Lösung: Alle Funktionswerte sind sicher positiv, weil der Graph von f über der x-Achse liegt. In jedem Punkt ist die Steigung der jeweiligen Tangente negativ, also ist f' negativ. Die erste Ableitung ist nirgends konstant, d.h. die zweite Ableitung sicher ungleich Null. Der Graph beschreibt eine strikt konvexe Funktion, damit muss $f'' > 0$ sein.

8.2. Polynomialen Funktionen (schriftlich)

(a) Sei P_n, $n \geq 0$ der Vektorraum der polynomialen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\text{grad}(f) \leq n$. Berechne die Dimension von P_n.

Lösung: Die Dimension von P_n ist $n+1$, weil eine Basis von P_n $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ ist.

(b) Zeige, dass die Ableitung

$$\begin{aligned} P_n &\to P_{n-1} \\ f &\to f' \end{aligned}$$

eine surjektive lineare Abbildung ist. Berechne dessen Kern.

Lösung:

linear: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in P_n$, dann wir haben

$$\begin{aligned} f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad g = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \quad &\Rightarrow \quad f' = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \quad g' = \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{k-1} \\ &\Rightarrow \quad \alpha f' + \beta g' = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) k x^{k-1} \end{aligned}$$

und

$$\alpha f + \beta g = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k \quad \Rightarrow \quad (\alpha f + \beta g)' = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) k x^{k-1}$$

Es folgt $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

surjektiv: $\forall f = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \in P_{n-1}$, $\exists F \in P_n$ mit

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

Es folgt $F' = f$.

Kern: $\{c \mid c \in \mathbb{R}\}$.

(c) Sei $Q_n = \{f \cdot \exp : f \in P_n\}$. Zeige, dass Q_n ein $(n+1)-$dimensionaler Vektorraum bildet.

Lösung: Einfach. Zeige, dass eine Basis von P_n $\{\exp(x), x\exp(x), x^2\exp(x), ..., x^n\exp(x)\}$ ist.

(d) Zeige, dass die Ableitung $g \to g'$ einen Vektorraum Isomorphism

$$Q_n \to Q_n$$

gibt.

Lösung: Wenn die Ableitung linear und bijektiv ist, sie ist einen Vektorraum Isomorphism.

linear: gleich wie (b).

injektiv: $\forall f \in Q_n$ mit $f \neq 0$, $\exists n_0 \leq n$ mit

$$f = \sum_{k=0}^{n_0} a_k x^k \exp(x) \quad a_{n_0} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f' = a_{n_0} x^{n_0} \exp(x) + \sum_{k=0}^{n_0-1} \Big[a_k + (k+1)a_{k+1}\Big] x^k \exp(x)$$

Weil $a_{n_0} \neq 0$, $a_{n_0} x^{n_0} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \Big[a_k + (k+1)a_{k+1}\Big] x^k \neq 0$. Dann $f' \neq 0$.

surjektiv: $\forall g \in Q_n$ mit

$$g = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \exp(x)$$

Wir benutzen

$$\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \exp(x) = a_n x^n \exp(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \Big[a_k + (k+1)a_{k+1}\Big] x^k \exp(x) = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \exp(x)\Big)'$$

Das ist äquivalent mit

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_k &= a_k + (k+1)a_{k+1} \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{aligned} \tag{1}$$

(1) hat eine Lösung, dann es gibt $f := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \exp(x) \in Q_n$ mit $f' = g$.

8.3. Ableitung Berechnen die Ableitung folgender Funktionen

(a) $\exp(\ln x), x \in (0, \infty)$

Lösung: $\exp(\ln x) = x$, dann $[\exp(\ln x)]' = 1$.

(b) $\exp(x^2), x \in \mathbb{R}$

Lösung: $[\exp(x^2)]' = 2x \exp(x^2)$.

(c) $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, x \in \mathbb{R}$

Lösung: Weil $x^2+1 \geq 1$, $[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}]' = 2x \cdot [-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}] = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$.

(d) Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Berechnen die Ableitung von $x \to \ln f(x)$.

Lösung: $[\ln f(x)]' = f'(x)[f(x)]^{-1}$.