9.1. Reihen in $\mathbb{R}$ mit reellem Parameter Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent? Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind sie absolut konvergent? Benutzen Sie die Kriterien aus der Vorlesung.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+n^2x^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+|x|^n}$, **(d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^x}{n^n}$.

Lösung: Wir bezeichnen die Folgenglieder jeweils a_n.

(a) Falls $|x| \geq 1$ sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |x|^{n!} \neq 0$, also muss die Reihe divergieren. Falls $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n,$$

und die rechte Seite ist eine Geometrische Reihe mit Basis $|x| < 1$, also konvergent.

Zusammenfassend: Die Reihe ist für $|x| \geq 1$ divergent und für $|x| < 1$ absolut konvergent.

(b) Falls $x = 0$, sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \neq 0$, also muss die Reihe divergieren. Falls $x \neq 0$, wir sehen, dass

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}x^2},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}},$$

und die Reihe auf der rechten Seite ist bekanntlich konvergent, weil $3/2 > 1$. Wir folgern, dass die Reihe absolut konvergent ist.

Zusammenfassend: Die Reihe ist für $x = 0$ divergent und für $x \neq 0$ absolut konvergent.

(c) Falls $x = 1$ oder $x = -1$, ist $a_n = 1/2$ für jedes n, also divergiert die Reihe. Falls $|x| > 1$, wir sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{|x|^n} = 1 \neq 0,$$

also muss die Reihe divergent sein. Falls $|x| < 1$, gilt

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{1 + |x|^n} \leq |x|^n.$$

Somit gilt wie in (a):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n < \infty.$$

Folglich ist die Reihe absolut konvergent.

Zusammenfassend: Die Reihe ist für $|x| \geq 1$ divergent und für $|x| < 1$ absolut konvergent.

(d) Falls $x = 1$ oder $x = -1$, ist $a_n = 1/2$ für jedes n, also divergiert die Reihe. Falls $|x| < 1$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}} = 1,$$

d.h. die Reihe ist divergent. Falls schlussendlich $|x| > 1$, gilt

$$\left|\frac{1}{1 + x^{2n}}\right| \leq \frac{1}{(x^2)^n},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2)^n}.$$

Damit schliessen wir wie in (a), dass die Reihe absolut konvergent ist.

Zusammenfassend: die Reihe ist für $|x| \leq 1$ divergent und für $|x| > 1$ absolut konvergent.

(e) Wir benutzen das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^x}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n!)^x} = \frac{((n+1)n!)^x}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{(n!)^x} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (n+1)^{x-1}.$$

Weil

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(1+n)^{x-1} = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x>1, \\ 1 & \text{falls } x=1, \\ 0 & \text{falls } x<1, \end{cases}$$

schliessen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x>1, \\ 1/\mathrm{e} & \text{falls } x=1, \\ 0 & \text{falls } x<1. \end{cases}$$

Damit erhalten wir, dass die Reihe für $x \leq 1$ absolut konvergent und für $x > 1$ divergent ist.

9.2. Reihen reellen Zahlen Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+100}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^{n+1}}$, **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$.

Bestimmen Sie, falls existent, die Werte von (b) und (d).

Lösung: Wir bezeichnen mit a_n das Glied jeder Folge.

(a) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz. Wir benutzen das Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{((n+1)n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)},$$

also $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/4 < 1$. Damit schliessen wir, das die Reihe absolut konvergent ist.

(b) Die Reihe ist einfach die harmonische Reihe ohne die ersten 100 Glieder, ist also divergent.

(c) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz. Wir benutzen das Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{n^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{5}{n\sqrt[n]{n}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, gilt $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 5/n = 0 < 1$, also ist die Reihe absolut konvergent.

(d) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz, und wir bemerken, dass diese Reihe ähnlich wie die Teleskopsumme ist. Wir suchen zuerst a und b so dass

$$\frac{1}{n(n+4)} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+4}.$$

Wir sehen, dass

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n+4} = \frac{(a-b)n + 4a}{n(n+4)},$$

also finden wir $a = b = 1/4$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots\right).$$

Also folgern wir, wie für die Teleskopsumme, dass die Partialsummen die Form

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4}\right)$$

haben. Somit schliessen wir, dass die Reihe absolut konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{48}$$

ist.

9.3. MC Frage: Konvergenz und absolute Konvergenz Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☑ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergiert absolut falls beide Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergent sind.

Richtig: Wegen $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$ haben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < +\infty.$$

Somit ist $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ absolut konvergent.

☑ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ existiert, falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

absolut konvergent sind.

Richtig: Da $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ ist haben wir

$$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall\ n \geq N : \quad |a_n| \leq 1.$$

Nun folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=0}^{N} |a_n b_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n b_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |b_n| < \infty.$$

Somit ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ sogar absolut konvergent.

☐ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ existiert, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert.

Falsch: Seien $a_0 := 1$, $a_1 := -1$ und

$$a_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad a_{2n+1} = -\frac{1}{2n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{falls } N \text{ gerade ist} \\ 0 & \text{falls } N \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0.$$

Da aber $a_0 = 1$, $-a_1 = 1$ und

$$(-1)^{2n} a_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = \frac{1}{2n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

existiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ nicht.

9.4. MC Fragen: Konvergenz gegen $\pm\infty$ Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass

$$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} +\infty \quad \text{und} \quad g(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty. \tag{1}$$

(a) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x\to\infty} 0?$$

☑ ja

Beispiel: $f(x) = x$ und

$$g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ gilt dann

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{-x^2} = \frac{-1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0.$$

☐ nein

(b) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x\to\infty} -\infty?$$

☑ ja

Beispiel: $f(x) = x^2$ und

$$g(x) = \begin{cases} -x, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann gilt für $x \neq 0$, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{-x} = -x \xrightarrow{x\to\infty} -\infty.$$

☐ nein

(c) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty? \tag{2}$$

☐ ja

☑ nein

Beweis: Wegen (1) gibt es ein $K > 0$, so dass

$$f(x) \geq 1 \quad \text{und} \quad g(x) \leq -1$$

für alle $x \geq K$. Insbesondere gilt für alle $x > K$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0.$$

Somit ist (2) nicht möglich.

9.5. Folgen von Funktionen Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert folgender Folgen von Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Bestimmen Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) = (1 + x/n)^2$

Lösung: Wir behaupten, dass $f_n(x)$ gleichmässig (und insbesondere auch punktweise) gegen $f(x) \equiv 1$ auf $[0,1]$ konvergiert. Tatsächlich gilt für alle $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left|(1 + \frac{x}{n})^2 - 1\right| = \left|1 + 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} - 1\right| \\ &= 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

was die gleichmässige und damit auch die punktweise Konvergenz zeigt.

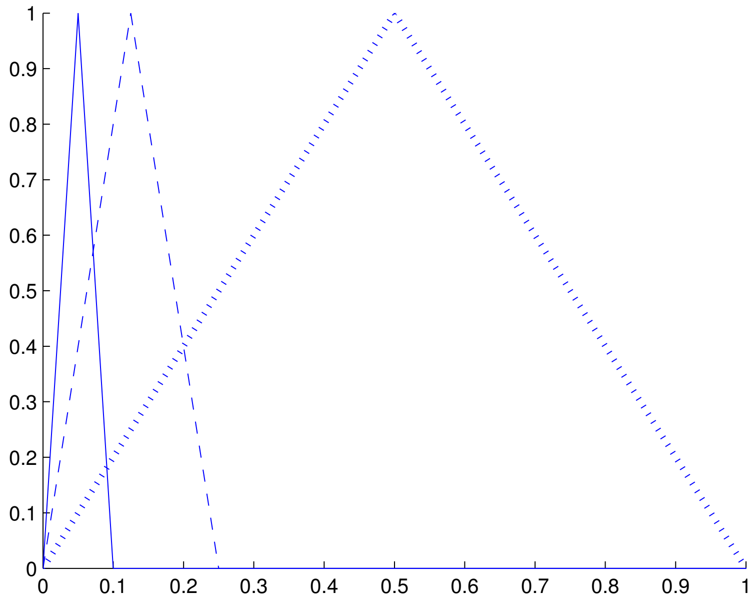
(b) $f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{falls } 0 \leq x < 1/(2n), \\ 2 - 2nx & \text{falls } 1/(2n) \leq x < 1/n, \\ 0 & \text{falls } 1/n \leq x \leq 1, \end{cases}$

Lösung: $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen $f(x) \equiv 0$. Tatsächlich, sei $x \in [0,1]$. Falls $x = 0$ ist, gilt $f_n(x) = 0$ für jedes x und somit sicher $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Für $x > 0$ wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $x > \frac{1}{n_0}$. Dann gilt insbesondere $x > \frac{1}{n}$ für alle $n \geq n_0$. Also ist $f_n(x) = 0$ für $n \geq n_0$ und damit sicher $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Wir behaupten, dass $f_n(x)$ gleichmässig gegen $f(x) \equiv 0$ nicht konvergiert. Es gilt für jedes n, dass $f_n(\frac{1}{2n}) = 1$ ist und damit ist $f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n}) = 1$.
Damit gilt aber auch

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right) \right| = 1 \nrightarrow 0$$

und die Folge konvergiert nicht gleichmässig.



Graphen der Funktionen f_1, f_4 und f_{10}

Bemerkung: Eine Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls für jedes $x \in I$ die (Zahlen-)Folge $f_n(x)$ gegen den Wert $f(x)$ konvergiert, d.h. $|f(x) - f_n(x)| \to 0$ für jedes $x \in I$.
Eine Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmässig gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0.$$

9.6. Eine Funktionenreihe Die Funktion $\langle\cdot\rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert: $\langle x\rangle$ ist der Abstand von x zu der nächsten ganzen Zahl, nämlich, mit der Abrundungsfunktion

$$\langle x\rangle = \begin{cases} x - [x] & \text{falls } x - [x] \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - (x - [x]) & \text{falls } x - [x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man definiere die Funktion f durch

$$f(x) = \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} + \frac{\langle 100x\rangle}{100} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Offensichtlich haben wir punktweise Konvergenz

$$f_i \xrightarrow{i\to\infty} f,$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \langle x\rangle \\ f_2(x) &= \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} \\ f_3(x) &= \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} + \frac{\langle 100x\rangle}{100} \\ &\vdots \\ f_i(x) &= \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie Graph(f_i) für $i = 1, 2, 3$ über das Interval $[0, 1]$. Sieht es so aus als konvergiere die Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f?

Lösung: Wir machen dies mittels der Software R. Zunächst definieren wir $\langle\cdot\rangle$ (was wir in R h nennen):

```
h <- function(x){
if (x-floor(x)>1/2){
y <- 1-(x-floor(x))} else {
y <- x-floor(x)}
return(y)}
```

Nun können wir unsere 3 Funktionen $f_k,\ k = 1, 2, 3$ definieren:

```
f1 <- function(x){return(h(x))}
f2 <- function(x){return(h(x)+h(10*x)/10)}
f3 <- function(x){return(h(x)+h(10*x)/10+h(100*x)/100)}
```

Um den Graphen zu zeichnen benutzen wir

```
x <- 1:1000
y1 <- 1:1000
y2 <- 1:1000
y3 <- 1:1000
for (i in 1:1000){
x[i] <- i/1000
y1[i] <- f1(x[i])
y2[i] <- f2(x[i])
y3[i] <- f3(x[i])}
plot(x,y1,col="green")
points(x,y2,col="red")
points(x,y3,col="black")
```

Dies ergibt Abbildung 1.

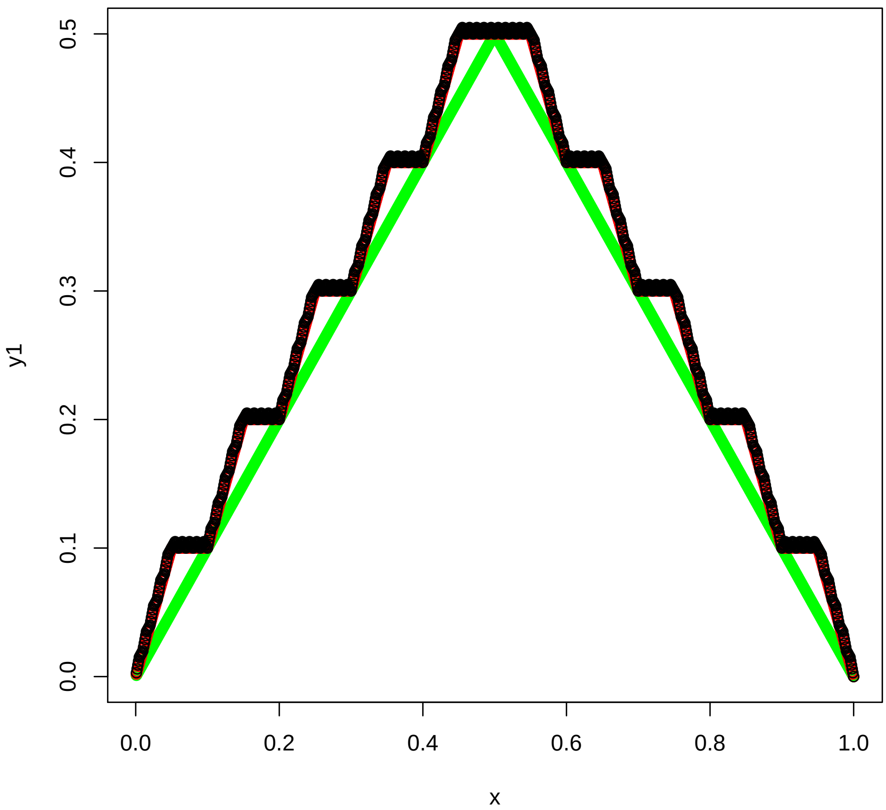


Abbildung 1: Graph(f_1) ist grün, Graph(f_2) ist rot und Graph(f_3) ist schwarz. Man sieht, dass Graph(f_2) und Graph(f_3) schon 'fast gleich' sind. (Siehe online version für Farben)

(b) Zeigen Sie, dass die gegebene Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist.

Lösung: Es immer gilt für jedes $y \in \mathbb{R}$ $|\langle y \rangle| < 1$, also

$$\frac{|\langle 10^k x \rangle|}{10^k} \leq \frac{1}{10^k} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\langle 10^k x \rangle|}{10^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} < +\infty,$$

damit ist die Reihe absolut konvergent auf $\mathbb{R}$.

(c) Betrachten Sie jetzt die Folge $f_i(x) = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k}$. Konvergiert f_i nach f gleichmässig?

Lösung: Um gleichmässige Konvergenz zu beweisen, beobachten wir, dass *für jedes* $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} |f_i(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} \right| \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{10^k} \to 0 \quad \text{für } i \to \infty. \end{aligned}$$

Somit $\lim_{i\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_i(x) - f(x)|\right) = 0$.

(d) Ist f stetig?

Lösung: Stetigkeit von f folgt sofort aus Satz 3.33 in Prof. Marc Burger Skript.

9.7. Mittelwertsatz Sei $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]0,\pi[$ mit $f(0) \geq 1$ und $f'(x) \geq -1$ für alle $x \in\,]0,\pi[$. Folgern Sie $f(x) \geq 1 - x$ für alle $x \in [0,\pi]$ aus dem Mittelwertsatz. Folgt auch, dass f monoton ist? Beweisen oder widerlegen Sie diese Behauptung.

Lösung: Sei $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) \geq 1$ und $f'(x) \geq -1$. Zu zeigen ist $f(x) \geq 1 - x$ für alle $x \in [0,\pi]$.

Die Behauptung an der Stelle $x = 0$ folgt aus der Annahme $f(0) \geq 1$. Sei daher $x \in\,]0,\pi]$ beliebig. Gemäss dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in\,]0,x[$ mit

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{\geq 1} + \underbrace{f'(\xi)}_{\geq -1}(x - 0) \geq 1 - x.$$

Die Funktion f muss nicht monoton sein: $f(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$ erfüllt die Voraussetzungen $f(0) = 1 \geq 1$ und $f'(x) = -\sin(2x) \geq -1$, ist aber nicht monoton in $[0,\pi]$, da $f(0) = 1 = f(\pi)$ und $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.