10.1. MC Fragen

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

☑ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) = 0$ für i ungerade.

☐ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) = 0$ für i gerade.

☐ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) \neq 0$ für i ungerade.

☐ $\frac{d^i}{dt^i}|_{x=0} f(x) = f^{(i)}(0) \neq 0$ für i gerade.

10.2. Eine Annäherung Sei $f : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arctan(x)$ die Funktion, so dass

$$\tan(f(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Lösung: Wir wissen aus der Vorlesung, dass $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \ni y \mapsto \tan(y)$ glatt ist (sie ist eine konvergente Potenzreihe) und

$$f'(x) = \frac{1}{\tan'(f(x))} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt, dass f' in der Klasse C^0 liegt. Also liegt f in der Klasse C^1. Um zu zeigen, dass f in der Klasse C^k liegt für jedes $k \in \mathbb{N}$, machen wir einen Induktionsbeweis. Wir haben schon die Verankerung gezeigt. Unsere Induktionsannahme ist, dass f in der Klasse C^{k-1} liegt und wir müssen zeigen, dass dies impliziert, dass f in der Klasse C^k liegt. Also, dass $f^{(k-1)}$ in der Klasse C^1 liegt. Wir haben

$$f^{(k-1)}(x) = \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} f'(x) = \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} \left(\frac{1}{\tan'(f(x))} \right).$$

Aus der Produkt-, Quotient-, und Kettenregel folgt, dass dies nur Glieder von Produkten, Quotienten und Kompositionen von

$$\frac{d^l}{dx^l} f(x),\ l = 0, \dots k-1 \quad \frac{d^m}{dx^m} \tan(x),\ m = 1, \dots, k$$

enthält. Aus unserer Annahme (f liegt in der Klasse C^{k-1}) folgt, dass $f^{(k-1)}$ eine stetig differentierbare Funktion ist. Somit ist $f^{(k-1)}$ in der Klasse C^1, da f ist in der Klasse C^k ist. Nun folgt, dass f in der Klasse C^∞ liegt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$|f^{(3)}(x)| \leq 2 \quad \forall\, |x| \leq 10.$$

Lösung: Wir haben

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} f'(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Dies ergibt

$$f^{(3)}(-10) = f^{(3)}(10) = \frac{600-2}{(1+100)^3} = \frac{598}{101^3} \in (0,1).$$

Nun berechnen wir, dass

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\right) = \frac{-24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x \in \{-1,0,1\}$$

und

$$f^{(3)}(-1) = f^{(3)}(1) = \frac{6-2}{(1+1)^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$f^{(3)}(0) = -2.$$

Da das Maximum von $|f^{(3)}||_{[-10,10]}$ entweder ein kritischer Punkt von $f^{(3)}$ in $(-10,10)$ ist oder gleich $f(-10), f(-10)$ ist, haben wir die Behauptung gezeigt.

(c) Bestimmen Sie eine Annäherung $c \in \mathbb{R}$ zu $f(\frac{1}{2})$, so dass $|c - f(\frac{1}{2})| < \frac{1}{10}$.

Hinweise: Benutzen Sie eine Taylorannäherung.

Lösung: Aus der Vorlesung (siehe auch Satz 4.43, Prof. Marc Burger Skript) folgt, dass es ein $\xi \in]0, \frac{1}{2}[$ gibt, so dass

$$|P_2(\tfrac{1}{2}) - f(\tfrac{1}{2})| \leq \left| f^{(3)}(\xi) \frac{(\frac{1}{2})^3}{3!} \right| \leq \frac{2}{2^3 \cdot 3!} = \frac{1}{24} < \frac{1}{10},$$

wobei

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} = x$$

das Taylorpolynom zweiter Ordnung ist.[1] Unsere Annäherung ist somit

$$f(\tfrac{1}{2}) \approx P_2(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

[1] Bemerken Sie, dass das Taylorpolynom *zweiter Ordnung* in diesem Fall ein Polynom *erster Ordnung* ist!

10.3. Eine glatte Funktion Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(]0,\infty[)$ ist und, dass $f^{(m)}(x) = P_m(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ gilt für $x > 0$. Dabei sind die P_m ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) Polynome.

Lösung: Wir machen einen Induktionsbeweis. Für $m = 0$ gilt die Aussage offensichtlich mit $P_0 \equiv 1$. Dies zeigt die Verankerung. Induktionsannahme: $f^{(m)}(x) = P_m(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ für alle $x > 0$, wobei P_m ein Polynom ist. Dann ist auch P'_m ein Polynom und

$$\frac{d}{dx} f^{(m)}(x) = \frac{d}{dx}\left(P_m(\tfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = \left(-P'_m(\tfrac{1}{x})\tfrac{1}{x^2} + 2P_m(\tfrac{1}{x})\tfrac{1}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Wenn $z = \frac{1}{x}$ sehen wir, dass

$$-P'_m(\tfrac{1}{x})\tfrac{1}{x^2} + 2P_m(\tfrac{1}{x})\tfrac{1}{x^3} = -P'_m(z)z^2 + 2P_m(z)z^3$$

ist, was wiederum ein Polynom in z ist. Somit haben wir den Induktionsschritt gezeigt.

(b) Bestimmen Sie $P_1, \dots, P_4$.

Lösung: Für $x > 0$ haben wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} \\ f^{(2)}(x) &= \frac{4 - 6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{4(6x^4 - 9x^2 + 2)}{x^9}e^{-\frac{1}{x^2}} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{4(30x^6 - 75x^4 + 36x^2 - 4)}{x^{12}}e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} P_1(z) &= 2z^3 \\ P_2(z) &= 4z^6 - 6z^4 \\ P_3(z) &= 4(6z^5 - 9z^7 + 2z^9) \\ P_4(z) &= -4(30z^6 - 75z^8 + 36z^{10} - 4z^{12}). \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{x\downarrow 0} f^{(m)}(x) = 0$$

für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lösung: Da P_m ein Polynom ist, gilt $|P_m(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$ und damit gilt

$$P_m(\tfrac{1}{x}) \xrightarrow{x\downarrow 0} \infty$$

wenn P_m nicht konstant ist. Offensichtlich gilt auch

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x\downarrow 0} 0.$$

Da aber die Exponentialfunktion viel schneller wächst als jedes Polynom, haben wir

$$f^{(m)}(x) = P_m(x)e^{-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x\downarrow 0} 0$$

für jedes $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, was die Teilaufgabe löst.

(d) Folgern Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist mit $f^{(m)}(0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lösung: f ist stetig differenzierbar sowohl auf dem Intervall $[0, \infty[$, als auch auf dem Intervall $]-\infty, 0]$. Wegen **(c)** haben wir

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t\uparrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t}.$$

Somit ist $f \in C^1(\mathbb{R})$. f' ist stetig differenzierbar sowohl auf dem Intervall $[0, \infty[$, als auch auf dem Intervall $]-\infty, 0]$. Wegen **(c)** haben wir

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \lim_{t\uparrow 0} \frac{f'(t) - f'(0)}{t}.$$

Somit ist $f' \in C^1(\mathbb{R})$. Also, $f \in C^2(\mathbb{R})$. Ein Induktionsargument zeigt nun, dass $f \in C^m(\mathbb{R})$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wegen **(c)** gilt offensichtlich $f^{(m)}(0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

10.4. Riemann Integral (schriftlich)

Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational oder } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q}, p \text{ und } q \text{ natürliche Zahlen, Teilerfremd} \end{cases}$$

Zeige, f is integrierbar und $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Lösung: Wenn u eine Treppenfunktion mit $u \leq f$ ist, dann gilt $\int_a^b udx \leq 0$. Insbesondere $u = 0 \leq f$, $\int_a^b udx = 0$. Die obere Schranke ist erreichte und dann erhalten wir $\sup s(f) = 0$. Wir möchten $\inf S(g) = 0$ beweisen. Dies ist genügt zu beweisen dass f Riemann-integrarier ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wenn $x \in [0,1]$ mit $f(x) \geq \varepsilon$ ist, dann gibt es höchstens $\sum_{k=1}^{n-1} k \leq \frac{n^2}{2}$ Werte x. Wir nennen diese Werte **schlechte Punkte**, und sonst **gute Punkte**. Sei $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$ eine Zerlegung wobei $N > \frac{n^2}{\varepsilon}$. Diese Zerlegung ist gegeben durch $x_k = \frac{k}{N}$. Zudem gilt $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{N}$. Wir setzen

$$v_N(x) = \begin{cases} 1, x \text{ schlechter Punkt} \\ \varepsilon, x \text{ guter Punkt.} \end{cases}$$

Somit ist $\int_a^b v_N dx \leq n^2 \frac{1}{N} + N\varepsilon \frac{1}{N} = \frac{n^2}{N} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$. Ausserdem haben wir $v_N \geq f$. Wir erhalten

$$0 = \sup s(f) \leq \inf S(f) \leq 2\varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, dann schliessen wir dass f Riemann-integrierbar ist und

$$\int_0^1 f dx = 0.$$