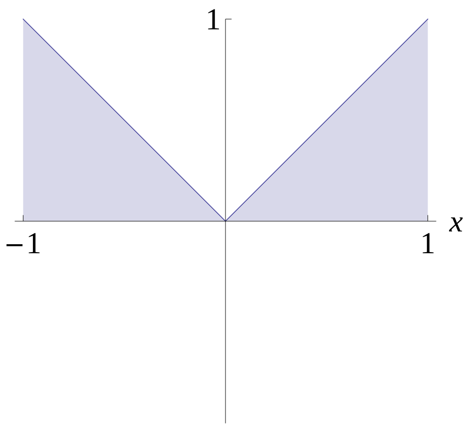
11.1. MC Fragen: Das riemannsche Integral Wählen Sie die richtigen Antworten aus.

(a) Der Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} |t|\, dt$ beträgt:

- ☐ 0.
- ☑ 1.
- ☐ 2.
- ☐ 4.
- ☐ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Lösung: Das Integral $\int_{-1}^{1} |t|\, dt$ ist der Inhalt der Fläche, welche der Funktionsgraph mit der x-Achse einschliesst. Also:



Die beiden Dreiecke bilden zusammen ein Quadrat mit Seitenlänge 1, welches den Flächeninhalt 1 hat. Mithin gilt $\int_{-1}^{1} |t|\, dt = 1$. Alternativ können wir aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Betragsfunktion auch rechnen:

$$\int_{-1}^{1} |t|\, dt = 2 \cdot \int_{0}^{1} t\, dt = 2 \left(\frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = 1.$$

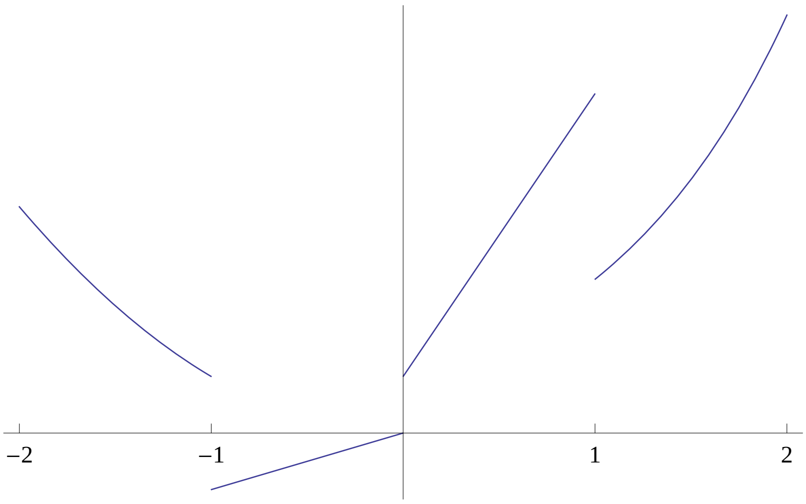
(b) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion f sind richtig?

- ☑ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.
- ☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.
- ☐ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.

☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.

☐ Keine.

Lösung: Korrekt ist nur ist die erste Implikationskette: Differenzierbare Funktionen sind stetig und nach dem Hauptsatz integrierbar. Die Umkehrungen gelten nicht: Zum Beispiel ist die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig aber nicht differenzierbar. Es gibt auch Funktionen, welche integrierbar aber nicht stetig sind. Ein Beispiel sind sogenannte stückweise stetige Funktionen. Die Idee dabei ist: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst stückweise stetig, wenn es eine Unterteilung von $[a, b]$ in offene Teilintervalle gibt, sodass f auf jedem Teilintervall stetig ist. Im Beispiel



ist $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ stetig auf den Teilintervallen $]-2,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ und $]1,2[$. Die Funktion springt an den Stellen -1, 0 und 1. Über den Funktionswert an den Sprungstellen x_i wird nichts vorausgesetzt. Es sollen jedoch jeweils der Grenzwert von links oder rechts existieren. Das Integral einer solchen Funktion wird dann definiert als:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0=a}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)\mathrm{d}x.$$

11.2. Integrierbarkeit (schriftlich) Seien $a < b < c$ und $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeige: f ist genau dann auf $[a, c]$ integrierbar falls die Einschränkungen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind. In diesem Fall gilt:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Lösung: Wenn eine Funktion riemannsche integrierbar ist, ist die Funktion beschränkt.

"$\rightarrow$"

$\forall$ Partition $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ von $[a, c]$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = c$, definieren wir $P|_{[a,b]} = (P \cup \{b\}) \cap [a, b]$ und $P|_{[b,c]}$ ist gleich. Dann $P|_{[a,b]} \cup P|_{[b,c]}$ ist eine Verfeinerung von P. Mit Lemma 5.2 (Prof. Marc Burger Skript) haben wir

$$s(f, P) \leq s(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]})+s(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]}) \leq S(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]})+S(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]}) \leq s(f, P)$$

Dann

$$\begin{aligned}
\sup_{P\in P([a,c])} s(f, P) &\leq \sup_{P\in P([a,c])} \left[s(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]}) + s(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]})\right] \\
&\leq \sup_{P\in P([a,c])} s(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]}) + \sup_{P\in P([a,c])} s(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]}) \\
&= \sup_{P_1\in P([a,b])} s(f|_{[a,b]}, P_1) + \sup_{P_2\in P([b,c])} s(f|_{[b,c]}, P_2) \\
&\leq \inf_{P_1\in P([a,b])} S(f|_{[a,b]}, P_1) + \inf_{P_2\in P([b,c])} S(f|_{[b,c]}, P_2) \\
&= \inf_{P\in P([a,c])} S(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]}) + \inf_{P\in P([a,c])} S(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]}) \\
&\leq \inf_{P\in P([a,c])} \left[S(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]}) + S(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]})\right] \\
&\leq \inf_{P\in P([a,c])} S(f, P)
\end{aligned}$$

Dann

$$s(f) \leq s(f|_{[a,b]}) + s(f|_{[b,c]}) \leq S(f|_{[a,b]}) + S(f|_{[b,c]}) \leq S(f)$$

Wenn $s(f) = S(f)$, $s(f|_{[a,b]}) = S(f|_{[a,b]})$ und $s(f|_{[b,c]}) = S(f|_{[b,c]})$.

"$\leftarrow$"(moglichkeit 1)

$f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, dann es gibt $C > 0$ mit $|f(x)| \leq C$.

$\forall\ \delta_0 > 0$, $P \in P_{\delta_0}([a, c])$, haben wir $P|_{[a,b]} \in P_{\delta_0}([a, b]), P|_{[b,c]} \in P_{\delta_0}([b, c])$ und

$$\begin{aligned}
|s(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]}) + s(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]}) - s(f, P)| \leq 2C\delta_0 \\
|S(f, P) - S(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]}) - S(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]})| \leq 2C\delta_0
\end{aligned}$$

$f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ sind integrierbar. Mit Satz 5.8 (Prof. Marc Burger Skript), $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta_1 > 0$ so dass $\forall P_1 \in P_{\delta_1}([a, b])$ und $P_2 \in P_{\delta_1}([b, c])$,

$$|S(f|_{[a,b]}, P_1) - s(f|_{[a,b]}, P_1)| + |S(f|_{[b,c]}, P_1) - s(f|_{[b,c]}, P_2)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Mit $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\epsilon}{8C}\}$, $\forall P \in P_\delta([a,c])$,

$$\begin{aligned}|S(f,P) - s(f,P)| \leq & |s(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]}) + s(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]}) - s(f,P)| \\ & + |S(f,P) - S(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]}) - S(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]})| \\ & + |S(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]}) - s(f|_{[a,b]}, P|_{[a,b]})| \\ & + |S(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]}) + s(f|_{[b,c]}, P|_{[b,c]})| \\ \leq & 2C \cdot \frac{\epsilon}{8C} + 2C \cdot \frac{\epsilon}{8C} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

f ist auf $[a,c]$ integrierbar(Satz 5.8, Prof. Marc Burger Skript).

"$\leftarrow$"(moglichkeit 2)

$f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ sind integrierbar, dann es gibt $P_{1,n}, P_{2,n}, n \in \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} s(f_{[a,b]}, P_{1,n}) = \lim_{n\to\infty} S(f_{[a,b]}, P_{1,n})$$

und

$$\lim_{n\to\infty} s(f_{[b,c]}, P_{2,n}) = \lim_{n\to\infty} S(f_{[b,c]}, P_{2,n})$$

Wir definieren $P_n := P_{1,n} \cap P_{2,n}$. Dann

$$\lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) \quad \to \quad f \text{ ist auf } [a,c] \text{ integrierbar}$$

11.3. Das riemannsche Integral (schriftlich) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

1. f ist stetig;
2. $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$;
3. $\exists x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) > 0$;

Zeige

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \tag{1}$$

Zeige anhand von Beispielen, dass jede der Voraussetzungen $1, 2, 3$ notwendig ist um (1) zu schliessen.

Lösung: Weil $f(x_0) > 0$ und f stetig ist, wir haben $\delta > 0$ mit

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} \quad x \in (x - \delta, x + \delta)$$

Dann mit Aufgabe 11.2

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x-\delta} f(x)dx + \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(x)dx + \int_{x+\delta}^b f(x)dx \geq \delta f(x_0) > 0$$

Ohne 1, ein Beispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq \frac{a+b}{2} \\ 1, & \text{falls } x = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Ohne 2, ein Beispiel ist

$$f(x) = x - \frac{a+b}{2}$$

Ohne 3, ein Beispiel ist $f = 0$.

11.4. Integrale der Trigonometrische Funktion (schriftlich) Berechne die Integrale für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$$

Benütze $0 < \sin x < 1$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ sowie Übung 2 um zu zeigen, dass:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)dx$$

Schliessen daraus:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

Lösung: Wir haben

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{wenn } n = 0$$

Wenn $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x)d[-\cos(x)] \\
&= -\cos(x)\sin^{2n-1}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)d[\sin^{2n-1}(x)] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n-1)\cos^2(x)\sin^{2n-2}(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n-1)[1-\sin^2(x)]\sin^{2n-2}(x)dx \\
&= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(x)dx - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx
\end{aligned}$$

dann

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(x)dx$$

Dann das ist klar mit Induktion.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx$ ist gleich.