12.1. MC Fragen: Integration Für $f \in C^0(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ lautet die Substitutionsregel

☐

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt$$

☑

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt$$

☑

$$\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})x\ dx = \int_{\frac{a^2}{2}}^{\frac{b^2}{2}} f(t)\ dt$$

Lösung: Man nimmt $g(x) = \frac{x^2}{2}$ mit $g'(x) = x$.

☐

$$\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})\ dx = \int_{a^2}^{b^2} tf(t)\ dt$$

12.2. Gewichteter Mittelwertsatz Seien $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen mit G stetig und $F > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $c \in [a,b]$ existiert, sodass

$$\int_a^b F(x)G(x)\,\mathrm{d}x = G(c)\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

(b) Bleibt (1) wahr, wenn F nicht notwendigerweise positiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

Lösung:

(a) Weil $F > 0$ ist, gilt:

$$\left(\inf_{[a,b]} G\right) F(x) \le G(x)F(x) \le \left(\sup_{[a,b]} G\right) F(x) \quad \text{für jedes } x \in [a,b];$$

somit folgt aus der Monotonie des Integrals:

$$\left(\inf_{[a,b]} G\right) \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b G(x)\,F(x)\,\mathrm{d}x \leq \left(\sup_{[a,b]} G\right) \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x,$$

danach (bemerken Sie, dass weil $F > 0$, $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x > 0$ ist):

$$\inf_{[a,b]} G \leq \frac{\int_a^b G(x)\,F(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x} \leq \sup_{[a,b]} G.$$

Da G stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass $c \in [a,b]$ existiert, sodass:

$$G(c) = \frac{\int_a^b G(x)\,F(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x},$$

gilt, welches zu der Schlussfolgerung führt.

(b) Falls nicht notwendigerweise $F > 0$, ist die Aussage falsch. Gegenbeispiel:

$$[a,b] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad F(x) = \sin x, \qquad G(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{falls } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right), \end{cases}$$

Man berechnet sofort, dass

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x)G(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \sup_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} G = \frac{\pi}{2};$$

somit ist es unmöglich, dass $c \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ existiert, welches die Aussage des gewichteten Mittelwertsatzes erfüllt:

$$1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x)G(x)\,\mathrm{d}x, \qquad G(c) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für jedes } c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

12.3. Cauchy Produkt der Reihen (schriftlich) Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

und

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots$$

Anhand der Rekursionsformel(Definition 5.41, eingetippte Notiz) für die Bernoulli Zahlen. Zeige, dass das Cauchy Produkt der Reihen $f(x)$ und $\frac{e^x-1}{x}$ gleich 1 ist.

Lösung: Das Cauchy Produkt ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{B_i}{i!} x^i \frac{x^{n-i}}{(n-i+1)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{B_i}{i!(n-i+1)!} x^n$$

Mit Definition 5.41(eingetippte Notiz) gilt

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{B_i}{i!(n-i+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = 0 \quad \forall n \geq 1$$

Dann $a_n = 0$ wenn $n \geq 1$ und $a_0 = 1$.

12.4. Euler Mclaurin Summationsformel (schriftlich) Durch sorgfältige Anwendung der Euler Mclaurin Summationsformel auf

$$f(x) = x^l, \quad l \geq 1, l \in \mathbb{N}$$

Zeige für alle $n \geq 1$:

$$1^l + 2^l + ... + n^l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}$$

Lösung: Alle Referenzen sind in eingetippte Notiz. Mit Beweis von Satz 5.42 gilt

$$\int_0^1 B_k(x)dx = 0 \quad \forall k \geq 1$$

Dann

$$\int_0^n \tilde{B}_k(x)dx = 0 \quad \forall k \geq 1, n \geq 1, k, n \in \mathbb{N}$$

f ist k-mal stetig dierenzierbar, und

$$f^{(j)}(x) = \frac{l!}{(l-j)!} x^{l-j}$$

Mit Satz 5.44 gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(i) &= \int_0^n f(x)dx + \frac{1}{2}n^l + \sum_{j=2}^{l} \frac{(-1)^j B_j}{j!} \frac{l!}{(l-j+1)!} n^{l-j+1} + (-1)^{l-1} \int_0^n \tilde{B}_l(x)dx \\
&= \frac{n^{l+1}}{l+1} + \frac{n^l}{2} + \frac{1}{l+1} \sum_{j=2}^{l} (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j} \\
&= \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}
\end{aligned}$$