13.1. Berechnung von Integralen Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int \sin^2 t\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t; \quad \textbf{(a)} \qquad \int \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t} \quad (\tan(t/2) = u); \quad \textbf{(b)}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\, \mathrm{d}t \quad (t^2+1 = u); \quad \textbf{(c)} \qquad \int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\, \mathrm{d}t \quad (t = \sin^2 u); \quad \textbf{(d)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}. \quad \textbf{(e)}$$

Lösung: Wir nennen jeweils “I” das betrachtete Integral.

(a) Ein kurzer Lösungsweg verwendet komplexe Zahlen. Da:

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos(2t)) = \frac{1}{2}(1-\Re(\mathrm{e}^{2it})),$$

wobei “$\Re(z)$”= Realteil von z ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t} - \Re(\mathrm{e}^{(-1+2i)t}))\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} - \Re\left(\int \mathrm{e}^{(-1+2i)t}\, \mathrm{d}t\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} + \Re\left(\frac{\mathrm{e}^{(-1+2i)t}}{1-2i}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{5}\Re\left((1+2i)\mathrm{e}^{(-1+2i)t}\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\left(-1 + \frac{1}{5}\Re((1+2i)\mathrm{e}^{2it})\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}\left(-1 + \frac{1}{5}\cos(2t) - \frac{2}{5}\sin(2t)\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Äquivalent erhält man mit $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{t}$ und partieller Integration das Ergebnis.

(b) Die vorgeschlagene Substitution besagt:

$$t = 2\arctan u, \qquad \mathrm{d}t = \frac{2}{1+u^2}, \qquad \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \frac{1}{1+\cos t} = \frac{1+u^2}{2}.$$

Damit ergibt sich:

$$I = \int \frac{1+u^2}{2}\frac{2}{1+u^2}\, \mathrm{d}u = u + C = \tan\left(\frac{t}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(c) Die vorgeschlagene Substitution besagt:

$$2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u, \qquad t^2 = u-1, \qquad \sqrt{t^2+1} = \sqrt{u}.$$

Damit ergibt sich:

$$I = \int \frac{u-1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u} + C = \frac{1}{3}(t^2-2)\sqrt{t^2+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(d) Die vorgeschlagene Substitution besagt:

$$\mathrm{d}t = 2\sin u\cos u\,\mathrm{d}u, \qquad \sqrt{1-t} = \cos u, \qquad \sqrt{t} = \sin u.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2\sin u\cos^2 u}{\sin u - \sin^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int 2(1+\sin u)\,\mathrm{d}u \\ &= 2(u-\cos u) + C = 2(\arcsin(\sqrt{t}) - \sqrt{1-t}) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(e) Wir verwenden die Substitution $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^t}$:

$$t = \log(u^2-1), \qquad \mathrm{d}t = \frac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \log\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + C = \log\left(\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}+1}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

13.2. Partialbruchzerlegung und Integration rationaler Funktionen Zerlegen Sie in geeignete Partialbrüche und integrieren Sie folgende Funktionen:

$$\frac{t+2}{t^2(t^2+2)}; \quad \textbf{(a)} \qquad \frac{t}{t^3+t^2-t-1}; \quad \textbf{(b)}$$

$$\frac{t^4+1}{(t^2+1)^2}; \quad \textbf{(c)} \qquad \frac{1}{t^6-1}. \quad \textbf{(d)}$$

Lösung: Wir nennen jeweils "I" das betrachtete Integral und "f" die betrachtete Funktion.

(a) Mit den Vorlesung gesehenen Techniken erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$f(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t} - \frac{t+2}{2(t^2+2)},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t} - \frac{t+2}{2(t^2+2)} \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{4}\log\left(t^2+2\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Mit den Vorlesung gesehenen Techniken erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$f(t) = \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t-1)},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t-1)} \,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{4}\log(|t+1|) + \frac{1}{4}\log(|t-1|) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Durch die in der Vorlesung gesehenen Techniken erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$f(t) = 1 + \frac{2}{(t^2+1)^2} - \frac{2}{t^2+1},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned} I &= \int 1 + \frac{2}{(t^2+1)^2} - \frac{2}{t^2+1} \,\mathrm{d}t \\ &= t + \frac{t}{t^2+1} + \arctan(t) - 2\arctan(t) + C \\ &= t + \frac{t}{t^2+1} - \arctan(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(d) Die Nullstellen des Polynoms $t^6 - 1$ sind di Zahlen ω^k, $k = 0, 1, \ldots 5$, wobei:

$$\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

damit besitzt f eine (komplexe) Partialbruchzerlegung der Form:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{5} \frac{C_k}{t - \omega^k}.$$

Da

$$\omega^0 = 1, \qquad \omega^3 = -1, \qquad \omega^4 = \overline{\omega^2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad \omega^5 = \overline{\omega} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

erhält man eine reelle Zerlegung von f, indem man die Terme $\{2, 4\}$ und $\{1, 5\}$ zusammenfasst:

$$f(t) = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct + D}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{Et + F}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}},$$

d.h.

$$f(t) = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct + D}{t^2 - t + 1} + \frac{Et + F}{t^2 + t + 1},$$

für Konstanten A, B, C, D, E, F, die wir bestimmen müssen. Geduldig verwenden wir den Koeffizientenvergleich und erhalten wir den Ausdruck:

$$f(t) = \frac{1}{6(t-1)} - \frac{1}{6(t+1)} + \frac{t-2}{6\,(t^2 - t + 1)} - \frac{t+2}{6\,(t^2 + t + 1)},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned} \int f(t)\,\mathrm{d}t = \quad & \frac{1}{6}\log(|t-1|) \\ & - \frac{1}{6}\log(|t+1|) \\ & + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\log\left(t^2 - t + 1\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ & + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\log\left(t^2 + t + 1\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right).\right) \end{aligned}$$

13.3. Uneigentliche Integrale Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie folgende Integrale (falls konvergent):

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x; \quad \textbf{(a)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{x^2}\,\mathrm{d}x; \quad \textbf{(b)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\log|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x; \quad \textbf{(c)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x. \quad \textbf{(d)}$$

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t; \qquad \textbf{(e)} \quad \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{1-x^x} \,\mathrm{d}x; \qquad \textbf{(f)}$$

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t. \qquad \textbf{(g)}$$

Lösung: Wir nennen jeweils "I" das betrachtete Integral.

(a) Da $\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}} \leq \frac{1}{x^3}$ für $x > 0$, gilt

$$\int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^a \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \quad \text{für jedes } a > 1,$$

und bekanntlich ist $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ konvergent; ausserdem ist $a \mapsto \int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$ monoton wachsend, weil der Integrand positiv ist. Wir schliessen, dass der Grenzwert für $a \to +\infty$ existiert, das heisst, dass I konvergent ist.

Mit der Substitution $t = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ ($x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \frac{(1-t^2)^3}{t^6} t \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \frac{1-t^2}{t^4} = 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} t^{-4} - t^{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[-\frac{1}{3}t^{-3} + t^{-1}\right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \\
&= 2\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{-3/2} + \sqrt{\frac{a}{a+1}} + \frac{1}{3}2^{3/2} - \sqrt{2},\right)
\end{aligned}$$

also:

$$I = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(2-\sqrt{2}).$$

(b) Das Integral konvergiert genau dann, wenn das Integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert. Mit der Substitution $t = \frac{1}{x}$ und für $0 < \epsilon < A$ erhalten wir:

$$\int_\epsilon^A \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{1/\epsilon}^{1/A} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-t}\right]_{1/A}^{1/\epsilon} = -e^{-\frac{1}{\epsilon}} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{A}},$$

und dieser Ausdruck strebt nach 1 für $A \to +\infty$ und $\epsilon \to 0^+$. Somit konvertiert das Integral und

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2.$$

(c) Wir sehen, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{|x|\log|x|}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x|x|}{1+x^2}\log x = +\infty,$$

somit wächst der Integrand schneller als $\frac{1}{x}$. Weil $\frac{1}{x}$ nicht integrierbar über $(1, +\infty)$ ist, kann I erst recht nicht konvergieren.

(d) Wir trennen das Integral:

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Weil $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x > 0$, und weil $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, ist I_1 nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Weil $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \le \frac{1}{x^{3/2}}$ für $x \ge 1$, und $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, ist I_2 nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Wir folgern, dass I konvergiert.

Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ erhalten wir:

$$\int_a^b \frac{1}{t(1+t^2)} 2t\,\mathrm{d}t = 2\left[\arctan t\right]_a^b = 2(\arctan b - \arctan a).$$

Da $\lim_{b\to+\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$ und $\arctan(0) = 0$, wir schliessen, dass $I = \pi$.

(e) Für alle $t \ge 0$ gilt mittels Taylor-Formel: $\sin t = t - \frac{t^3}{6}\cos\tau$ für ein $\tau \in [0, t]$. Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{6}{6 - t^2\cos\tau} - 1\right) = \frac{t\cos\tau}{6 - t^2\cos\tau} \le \frac{t}{5}, \quad t \in [0,1].$$

Der Integrand ist stetig nach 0 fortsetzbar, somit ist das Integral konvergent.

(f) Die Funktion $1 - x^x = 1 - e^{x\log x}$ ist positiv in $(0, \frac{1}{e})$, weil $x\log x < 0$ in $(0, \frac{1}{e})$. Da $\mathrm{e}^t > 1 + t$ für jedes $t > 0$, erhalten wir:

$$e^{x\log x} > 1 + x\log x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{x\log x}} > \frac{1}{1 - (1 + x\log x)} = \frac{1}{x\log x}.$$

Bekanntlich ist $\int_0^a \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x$ divergent. Somit ist nach dem Majorantenkriterium das Integral divergent.

(g) Die Substitution $t = \frac{1}{u}$ liefert, dass es äquivalent ist, die Konvergenz von:

$$\int_0^1 \frac{\sin u}{u^2} \, \mathrm{d}x$$

zu untersuchen. Mittels Taylor-Formel gilt: $\sin u = t - \frac{u^3}{6} \cos \tau$ für ein $\tau \in [0, u]$, somit:

$$\int_0^1 \frac{\sin u}{u^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{u} - \frac{\cos \tau}{6} u \right) \mathrm{d}u,$$

und dieses Integral ist bekanntlich divergent. Somit ist I divergent.

13.4. Gammafunktion Die Gammafunktion ist für reelle $\alpha > 0$ definiert durch:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t. \tag{1}$$

(a) Beweisen Sie, dass das uneigentliche Integral (1) für jedes $\alpha > 0$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie die Funktionalgleichung: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$.

(c) Beweisen Sie dass für natürliche Zahlen gilt $\Gamma(n + 1) = n!$. Was folgern Sie daraus?

(d) Berechnen Sie $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ mithilfe des wesentlichen Gausschen Integrals (das in Analysis II bewiesen werden wird):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Lösung:

(a) Wir trennen das Integral:

$$\Gamma(\alpha) = I_1 + I_2 = \int_0^1 t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Wegen $\alpha - 1 > -1$, konvergiert das Integral $\int_0^1 t^{\alpha-1} \, \mathrm{d}t$. Wegen $0 < t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-t} < t^{\alpha} - 1$ für $0 < t \leq 1$, konvergiert I_1.

Was I_2 betrifft,gibt es zu vorgegebenem $\alpha > 0$ ein t_0 mit $\mathrm{e}^t > t^{\alpha+1}$ für $t > t_0$. Hieraus folgt

$$t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-t} \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{für } t > t_0,$$

und dies impliziert die Konvergenz des Integrals $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$

(b) In der nachfolgenden Rechnung müssten strenggenommen Integrale von ϵ bis x betrachtet werden; anschliessend wäre der Grenübergang $\epsilon \to 0$, $x \to +\infty$ durchzuführen. Es gilt:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} \underset{\downarrow}{t^\alpha} \underset{\uparrow}{e^{-t}} \, dt = \left[-t^\alpha e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha t^{\alpha-1} e^{-t} \, dt = \alpha\Gamma(\alpha);$$

denn der erste Summand liefert wegen

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha e^{-t} = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} t^\alpha e^{-t} = 0$$

keinen Beitrag.

(c) Wir benutzen Induktion und (a). Es gilt:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1 = 0!.$$

Induktionsschritt:

$$\Gamma(n+2) \overset{(a)}{=} (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

Wir schliessen, dass bis auf Ersetzen $n \rightsquigarrow n+1$ die Gammafunktion eine Fortsetzung der Fakultätsfunktion: $n \mapsto n!$ auf nichtganze Werte ist.

(d) Zuerst bemerken wir, dass das Gaussche Integrals geschrieben werden kann als:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Mit der Substitution $u = \sqrt{t}$ erhalten wir:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} \, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi},$$

somit ist $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

13.5. Minkowski Ungleichung

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}, a < b$ sind stetig. Zeigen Sie,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad 1 < p < \infty$$

Lösung: Weil $x \to |x|^p$ eine konvexe Funktion ist, gilt

$$|f+g|^p = 2^p \cdot \left|\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g\right|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

und daher $f + g \in L^p$.
Sei im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|f + g\|_p > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|f+g|^p &= |f+g|^{p-1}|f+g| \\
&= |f+g|^{p-1}(|f|+|g|) \\
&= |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g|
\end{aligned}$$

Sei $q := \frac{p}{p-1}$. Dann ist q der zu p konjugierte Hölder-Exponent, es gilt:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Nach der Hölder-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p = \int_a^b |f+g|^p dx &\leq \int_a^b |f+g|^{p-1}|f| dx + \int_a^b |f+g|^{p-1}|g| dx \\
&\leq \|f\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f+g|^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\||f+g|^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\Big(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q} dx\Big)^{1/q} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\frac{\int_a^b |f+g|^p dx}{(\int_a^b |f+g|^p dx)^{1/p}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|^{p-1}
\end{aligned}$$