14.1. Berechnung von Folgengrenzwerten

a_n: Zuerst sehen wir, dass

$$\lim_n \frac{2-3n}{2n+1} = \lim_n \frac{\cancel{n}\left(\frac{2}{n}-3\right)}{\cancel{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim_n \frac{\left(\frac{2}{n}-3\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)} = -\frac{3}{2}.$$

Dann können wir → Satz 3.3.2 (ii) benutzen um zu schliessen

$$\lim_n \left(\frac{2-3n}{2n+1}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}.$$

b_n: Es gilt:

$$\sqrt[n]{3^n+7^n} = \left(7^n\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n+1\right)\right)^{1/n} = 7\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n+1\right)^{1/n}.$$

Weil $3/7<1$, folgern wir, dass

$$\lim_n \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_n \left(\left(\frac{3}{7}\right)^n+1\right)^{1/n} = \lim_n 1^{1/n} = 1,$$

also $\lim_n \sqrt[n]{3^n+7^n} = 7$.

c_n: Wir multiplizieren und teilen durch $\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-1}) &= \frac{(n+5)-(n-1)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}}\\ &= \frac{6}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}}.\end{aligned}$$

Weil der Nenner für $n\to\infty$ nach $+\infty$ divergiert, und der Zähler konstant ist, schliessen wir, dass $\lim_n(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-1})=0$.

d_n: Wir raten, dass die Folge nach 1 konvergiert. Um das zu beweisen, sei $\epsilon>0$ fixiert. Es gilt:

$$|d_n-1| = |0.\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ mals}}1| = \frac{1}{10^{n+1}},$$

also wählen wir $N_\epsilon\in\mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{10^{N_\epsilon+1}} < \epsilon,$$

das heisst $N_\epsilon > \log_{10}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) - 1$. Somit

$$|d_n - 1| < \epsilon \quad \forall N \geq N_\epsilon,$$

und das ist genau die Definition von Konvergenz nach 1.

e_n: Wir sehen, dass

$$e_n = \begin{cases} 3 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1/3 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

d.h. die Folge pendelt zwischen 3 und 1/3, und kann deshalb nicht konvergieren.

f_n: Wir sehen, dass

$$f_n = \begin{cases} n+1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n-1 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also gilt $f_n \geq n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das impliziert, dass die Folge nach $+\infty$ divergiert.

g_n: Es gilt:

$$\frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} = \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}.$$

Weil sowohl 2/3 als auch 3/4 kleiner als 1 sind, gilt $\lim_n (2/3)^n = 0$ und $\lim_n (3/4)^n = 0$, danach schliessen wir mit → Satz 3.3.2 (ii), dass

$$\lim_n \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} = \lim_n \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

h_n: Weil die Folge $(-1)^n$ beschränkt ist, und weil die Folge $1/n$ nach 0 konvergiert, schliessen wir, dass

$$\lim_n \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

14.2. Äquivalente Bedingungen von Konvergenz Wir beweisen "(1) ⇒ (2)" durch "(2) falsch ⇒ (1) falsch". Die Negation von "$\forall\, \epsilon > 0$, M_ϵ ist endlich" ist

"$\exists\, \epsilon > 0$ so dass M_ϵ unendlich ist". Also, falls ein solches ϵ existiert, besteht M_ϵ aus einer unendlichen Folge $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ so dass $a_{n_j} \notin]a-\epsilon, a+\epsilon[$, d.h.

$$|a_{n_j} - a| \geq \epsilon \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

und das meint genau, dass (1) falsch ist.

Wir beweisen danach "(2) $\Rightarrow$ (1)". Für bestimmtes $\epsilon > 0$, sei $N \in \mathbb{N}$ die grösste Zahl, so dass $a_N \in M_\epsilon$. Für jedes $n > N$ gilt dann $a_n \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$, d.h. $|a_n - a| < \epsilon$. Dann setzen wir $N_\epsilon = N + 1$.

14.3. Wachstumsraten Die Ungleichungskette ist wie folgt:

$$n^\alpha \leq x^n \leq n! \leq n^n.$$

Zweite Ungleichung: Wie in 3.2 (e), gilt für eine natürliche Zahl so dass $k \geq x$ (z.B. $k = [x] + 1$)

$$\frac{x^n}{n!} \leq \frac{k^{k+1}}{k!} \frac{1}{n}.$$

Es ist jetzt genug, N_0 so dass $N_0 \geq k^{k+1}/k!$, da denn

$$\frac{x^n}{n!} \leq \frac{k^{k+1}}{k!} \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow x^n \leq n! \quad \forall n \geq N_0.$$

Dritte Ungleichung: Wie in 3.2 (d), wir sehen, dass

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \geq 1,$$

also $n! \leq n^n$ für alle $n \geq 1$.

14.4. Gerade und ungerade Teilfolgen "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Sei a der Grenzwert der gemeinsam geraden und ungeraden Teilfolge. Aus der Definition von Konvergenz, existieren für jedes $\epsilon > 0$, $N', N'' \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_{2n} - a| < \epsilon \quad \text{für } n \geq N' \quad \text{und} \tag{1}$$
$$|a_{2n+1} - a| < \epsilon \quad \text{für } n \geq N''. \tag{2}$$

Damit setzen wir $N_\epsilon = \max\{2N', 2N'' + 1\}$: es gilt dann

$$|a_m - a| < \epsilon \quad \text{für jedes } m \geq N,$$

weil falls m gerade ist, gilt (1), falls ungerade, (2).

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": da die Folge konvergent ist, konvergiert jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert (siehe 3.6), insbesondere konvergieren die gerade und ungerade Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert.

14.5. Rekursiv Folgen

(a) *Behauptung 1:* Die Folge ist monoton wachsend.
Beweis: Durch Induktion nach n:
Verankerung: $1 = d_1 < \sqrt{5} = d_2$.
Ind.Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{2d_n + 3} > \sqrt{2d_{n-1} + 3} = d_n$. Behauptung 1 ist also bewiesen.

Behauptung 2: Die Folge ist nach oben durch 3 beschränkt.
Beweis: Durch Induktion nach n:
Verankerung: $d_1 = 1 \leq 3$.
Ind.Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{2d_n + 3} \leq \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$. Behauptung 2 ist also auch gezeigt.

Nach dem Satz über monotone Konvergenz konvergiert jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Also konvergiert $d_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d \in \mathbb{R}$.

Der Grenzwert d muss die Gleichung $d = \sqrt{2d+3} \iff d^2 - 2d - 3 = 0$ erfüllen (da $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist). Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} .$$

Da die Folge monoton wachsend ist und $d_1 = 1 > -1$ ist, folgt $d \neq -1$. Somit ist der Grenzwert $d = \lim_{n\to\infty} d_n = 3$.

(b) Offensichtlich ist die Folge von unten durch 0 beschränkt.
Behauptung 1: Die Folge ist monoton fallend.
Beweis: Durch Induktion nach n:

Verankerung: $d_2 = \sqrt{9-2} = \sqrt{7} < 3 = d_1$.
Ind. Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \leq \sqrt{3d_{n-1} - 2} = d_n$.
Damit ist Behauptung 1 gezeigt.

Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge, konvergiert nach dem Satz über monotone Konvergenz. Also konvergiert $d_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d \in \mathbb{R}$.

Der Grenzwert muss die Gleichung $d = \sqrt{3d-2} \iff d^2 - 3d + 2 = 0$ erfüllen (da $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist). Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} .$$

Behauptung 2: Für jedes $n \geq 1$ gilt $d_n \geq 2$.
Beweis: Durch Induktion nach n:

Verankerung: $d_1 = 3 > 2$.
Ind. Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \geq \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2$.
Somit ist auch Behauptung 2 gezeigt.

Also ist $d \neq 1$ und es folgt $d = \lim_{n\to\infty} d_n = 2$.

14.6. Folgengrenzwerte

(a) Mit Hilfe der Reihenentwicklung von e^x und $\sin x$ erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} - 1 - 1/n}{1 - n\sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^{-2} + O(n^{-3})}{1 - n(n^{-1} - \frac{1}{6}n^{-3} + O(n^{-5}))} = \frac{1/2}{1/6} = 3.$$

(b) Die Taylorreihe von $\sqrt{1+x}$ ist $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2+n} &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{2}n^{-3} - O(n^{-6}) - 1 - \frac{1}{2}n^{-1} + O(n^{-2})\right) \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c) Beh. 1: $a_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion:
$n = 1$: $a_1 = 1 \leq 2$.
Induktionsschritt: $n \to n+1$:
Nach Induktionsannahme: $a_n \leq 2 \implies a_n + 1 = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+2} < 2$. Dies zeigt Behauptung 1.

Beh. 2:(a_n) ist monoton wachsend, d.h. $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion:
Verankerung: $a_1 = 1 \leq \sqrt{1+1} = a_2$
Induktionsschritt: $n \to n+1$:
Da nach Ind.annahme $a_n \leq a_{n+1}$ ist, folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Dies zeigt Behauptung 2.

Da jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge, konvergent ist, konvergiert $a_n \to a \in \mathbb{R}$, für ein a das wir noch bestimmen müssen.

Falls a der Grenzwert der Folge ist, muss a unter der Rekursionsvorschrift fest bleiben, d.h.

$$a = \sqrt{1+a}.$$

Somit gilt $a^2 = 1 + a \iff a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Da $a_n \geq 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$ muss auch der Grenzwert $a \geq 0$ sein und damit ist

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

14.7. Konvergente Teilfolge "(i) $\Rightarrow$ (ii)": wenn eine Folge $(a_n)_n$ nach a konvergiert, konvergieren alle ihren Teilfolgen gegen a. Tatsächlich, sei $(a_{n_j})_j$ eine Teilfolge von $(a_n)_n$. Für jedes $\epsilon > 0$, existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N. \tag{3}$$

Da $(a_{n_j})_j$ eine Teilfolge von $(a_n)_n$ ist, gilt $n_1 \geq 1$; weil $n_2 > n_1$, folgt, dass $n_2 \geq 2$. Ähnlich gilt, für jedes $k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq k$, also falls (3) gilt, gilt auch

$$|a_{n_j} - a| < \epsilon \quad \text{für jedes } j \geq N.$$

Dies bedeutet genau, dass $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = a$.

"(ii)$\Rightarrow$(i)": eine triviale Teilfolge von $(a_n)_n$ ist $(a_n)_n$ selbst. Da jede Teilfolge konvergiert, konvertiert also die ursprüngliche Folge.

14.8. Reihen mit π Die Reihe mit $2n$ ist klar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Was die anderen Reihen betrifft, so bemerken wir, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ gerade}}\frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ ungerade}}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ gerade}}\frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ ungerade}}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Damit schliessen wir, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8},$$

und dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

14.9. Reihen

(a) Wir bemerken $|\sin(n)| < 1$ für alle $n \geq 1$. Es folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{2^n} \right| \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Die Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium.

(b) Aus Aufgabe 1b) wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2} \neq 0$. Also ist die Folge (a_n) keine Nullfolge und somit konvergiert die Reihe nicht.

(c) Die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^{2015}}$ ist nicht negativ und monoton fallend. Nach dem Integraltest konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2015}}$ genau dann, wenn das Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert.

Das Integral konvergiert, denn es ist:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2015}}\,dx = -\frac{1}{2014} x^{-2014} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2014}.$$

Somit konvergiert auch die Reihe.

(d) s_n ist für $n \geq 0$ monoton wachsend und beschränkt, weil

$$\begin{aligned} |s_n| \quad &\leq \quad \sum_{j=0}^{n} \left| \frac{j^2-2}{2^j (j+1)^2} \right| \\ &\leq \quad \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2-1}{2^j (j+1)^2} \\ &\leq \quad \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 2 \end{aligned}$$

gilt. Somit konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Nach dem Minorantenkriterium divergiert die Reihe, weil die harmonische Reihe divergiert.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt{n}+n+1} &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\sqrt{n}+2)n}\\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+2}\\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\\ &\geq \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.\end{aligned}$$

(f) Es gilt

$$\begin{aligned}|a_n| &= |\sin(n)\cdot\frac{2n-1}{(n+1)^2}|\\ &= |\sin(n)|\cdot|\frac{2n-1}{(n+1)^2}|\\ &\leq |\frac{2+\frac{1}{n}}{n+2+\frac{1}{n}}| \overset{n\to\infty}{\to} 0\ .\end{aligned}$$

Somit konvergiert a_n gegen 0.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
Es gilt

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}\geq\frac{\sqrt{n}-1}{n\sqrt{n}+n}\\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\\ &\geq \frac{1}{2n}\ ,\end{aligned}$$

für $n\geq 9$.

Es ist bekannt, dass $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha\leq 1$ divergiert, insbesodere divergiert auch die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.
Nach Minoranten / Majorantenkriterium / Cauchy-Kriterium divergiert somit auch $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Somit ist die Reihe divergiert.

(h) Konvergenzradius ist

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+4}}{4} = \frac{1}{4}$$

Also Konvergenz in $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, Divergenz für $|x| > \frac{1}{4}$.

Randpunkte: $x = \pm\frac{1}{4}$ einzeln untersuchen.

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_n a_n x^n = \sum_n \frac{1}{n+4} \Rightarrow \text{divergent, da es harmonische Reihe ist}$$

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sum_n a_n x^n = \sum_n (-1)^n \frac{1}{n+4} \Rightarrow \text{konvergent, da alternierende harmonische Reihe}$$

14.10. Grenzwerte von Funktionen

(a) Es gilt:

$$\frac{4x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x(4-1/x)}{|x|\sqrt{1-1/x^2}};$$

weil x nach $-\infty$ strebt, können wir annehmen, das $x < 0$, also:

$$\frac{x(4-1/x)}{|x|\sqrt{1-1/x^2}} = -\frac{x(4-1/x)}{x\sqrt{1-1/x^2}} = -\frac{(4-1/x)}{\sqrt{1-1/x^2}},$$

also schliessen wir

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{(4-1/x)}{\sqrt{1-1/x^2}} = -4.$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}\right) &= \frac{x^2+5-9}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)}\\ &= \frac{x^2-4}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}\\ &= \frac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)},\end{aligned}$$

also

$$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} = \lim_{x\to2} \frac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{1}{3}.$$

(c) Der Zähler ist konstant und positiv, also

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{3}{x-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to 4^+} \frac{3}{x-4} = +\infty.$$

(d) Für jedes $x < 0$ gilt $|x|/x = -x/x = -1$, und für jedes $x > 0$ gilt $|x|/x = +x/x = 1$, also

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Wir folgern dass $\lim_{x\to 0} |x|/x$ nicht existiert, weil der rechtsseitige Grenzwert und der linksseitige Grenzwert verschiedene Werte haben.

Grenzwert mit Parametern: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x^2-7x+1} - (\beta x+\gamma) &= (\sqrt{2x^2-7x+1} - (\beta x+\gamma))\frac{\sqrt{2x^2-7x+1} + (\beta x+\gamma)}{\sqrt{2x^2-7x+1} + (\beta x+\gamma)} \\
&= \frac{2x^2-7x+1-(\beta x+\gamma)^2}{\sqrt{2x^2-7x+1} + (\beta x+\gamma)} \\
&= \frac{(2-\beta^2)x^2 + (-7-2\beta\gamma)x + 1 - \gamma^2}{\sqrt{2x^2-7x+1} + (\beta x+\gamma)}.
\end{aligned}$$

Damit der Grenzwert endlich ist, muss $2-\beta^2 = 0$ sein, d.h. $\beta = \sqrt{2}$ oder $\beta = -\sqrt{2}$. Falls $\beta = -\sqrt{2}$, ist der Grenzwert des Nenners gleich 0, somit divergiert der Grenzwert des Bruchteils. Für $\beta = \sqrt{2}$ erhalten wir wie in (a) und (b):

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{2x^2-7x+1} - (\sqrt{2}x+\gamma)) = \frac{-7-2\sqrt{2}\gamma}{2\sqrt{2}}.$$

Damit

$$\frac{-7-2\sqrt{2}\gamma}{2\sqrt{2}} = 0$$

ist, muss $\gamma = -\frac{7}{2\sqrt{2}}$ sein. Alles in allem, ist der Grenzwert Null falls

$$(\beta,\gamma) = \left(\sqrt{2}, -\frac{7}{2\sqrt{2}}\right).$$

14.11. Grenzwerte und Variablenwechsel

(a) Mit dem Variablenwechsel $y = -x$ sehen wir, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\log(1-x)}{-x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\log(1+y)}{y} = -1.$$

(b) Mit den Eigenschaften des Logarithmus erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}\log(1-\cos x) &= \log\left(\frac{1-\cos x}{x^2} x^2\right)\\ &= \log\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) + \log(x^2)\\ &= \log\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) + 2\log(x),\end{aligned}$$

also

$$\frac{\log(1-\cos x)}{\log x} = \frac{1}{\log x}\log\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) + 2.$$

Bekanntlich gilt $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ und $\lim_{x\to 0^+}\log x = -\infty$, daraus schliessen wir, dass

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-\cos x)}{\log x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\log x}\log\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 2.$$

(c) Wir multiplizieren und teilen durch x und sehen, dass für $x \to 0^+$ gilt

$$\log x \log(1-x) = \underbrace{x\log x}_{(i)}\underbrace{\frac{\log(1-x)}{x}}_{(ii)}.$$

Bekanntlich strebt (i) gegen 0 und aus (a) erhalten wir, dass der Grenzwert von (ii) gleich -1 ist. Daraus schliessen wir, dass $\lim_{x\to 0^+}\log x\log(1-x) = 0$.

(d) Mit dem Variablenwechsel $t = \log x$ erhalten wir

$$\lim_{x\to 1^+}\log x\log(\log x) = \lim_{t\to 0^+} t\log t = 0.$$

(e) Aus der Definition von $\tan x$ folgt:

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{(i)}\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{(ii)}\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{(iii)},$$

Bekanntlich streben für $x \to 0$ (i) and (ii) gegen 1 und (iii) gegen 1/2. Alles in allem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

(f) Mit dem Variablenwechsel $y = ax$ erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{y\to 0} a\frac{\sin(y)}{y} = a.$$

(g) Wir behaupten, dass der Grenzwert nicht existiert. Dazu betrachten wir die Folgen

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{und} \quad y_n = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beide Folgen streben für $n \to \infty$ gegen $+\infty$. Wir sehen, dass

$$\mathrm{e}^{x_n} \sin(\mathrm{e}^{-x_n} \cos x_n) = 0 \quad \text{für alle } n,$$

und

$$\mathrm{e}^{y_n} \sin(\mathrm{e}^{-y_n} \cos y_n) = \mathrm{e}^{y_n} \sin(\mathrm{e}^{-y_n}) = \frac{\sin(\mathrm{e}^{-y_n})}{\mathrm{e}^{-y_n}};$$

Mit einem Variablenwechsel $z_n = \mathrm{e}^{-y_n}$ sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\mathrm{e}^{-y_n})}{\mathrm{e}^{-y_n}} = 1$ gilt. Das impliziert (vgl. die Definition von Grenzwert mit Folgen), dass der Grenzwert $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x \sin(\mathrm{e}^{-x} \cos x)$ nicht existiert.

(h) Wir sehen, dass

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^{1/4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}}{x^{1/4}} = \sqrt{1+\sqrt{x}},$$

also

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^{1/4}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\sqrt{x}} = 1.$$

14.12. MC Fragen: Stetigkeit

(a) Die Aussage ist falsch. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x$. Sie ist stetig und monoton steigend, aber $f([0,1] \cup [2,3])$ nimmt nicht alle Werte zwischen $f(0)$ und $f(3)$ an. Dies folgt zum Beispiel aus der Beobachtung dass $f([0,1] \cup [2,3]) = f([0,1]) \cup f([2,3]) = [f(0), f(1)] \cup [f(2), f(3)]$.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

☐ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a) < f(b)$. Dann liegen alle Funktionswerte zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

Falsch: ein Gegenbeispiel zur Gültigkeit der Aussage liefert die Einschränkung von sin auf das Intervall $[0, 3\pi]$.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f in $[a, b]$ genau eine Nullstelle.

Falsch: die konstante Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, ist ein Gegenbeispiel.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f in (a, b) genau eine Nullstelle.

Richtig: der Zwischenwertsatz garantiert die Existenz einer Nullstelle, und aufgrund der strengen Monotonie kann es höchstens eine geben.

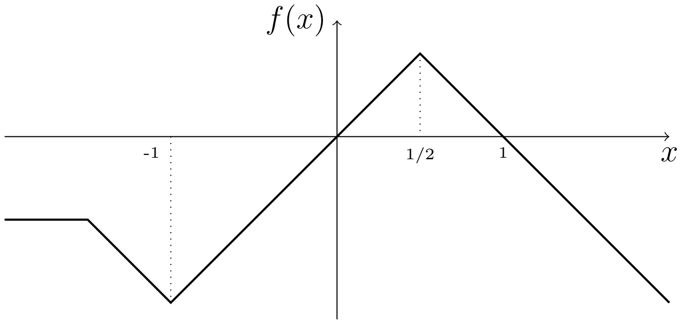
(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nur an den Punkten 0 und 1 verschwindet. Dann:

☐ ist f monoton in $]-\infty, 0]$;

Falsch: Gegenbeispiel:

$$f(x) = \begin{cases} -1/2 & \text{falls } x \leq -3/2, \\ -2 - x & \text{falls } -3/2 \leq x \leq 1, \\ x & \text{falls } -1 \leq x \leq 1/2, \\ 1 - x & \text{falls } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Der Graph von f ist:



☐ ist es möglich, dass f in $(1, +\infty)$ ihr Vorzeichen ändert;

Falsch: Falls $x, y \in]1, +\infty]$ existieren, so dass $f(x) > 0$ und $f(y) < 0$ gilt, muss nach dem Zwischenwertsatz ein $z \in (x, y)$ existieren, so dass $f(z) = 0$ gilt. Das widerspricht dert Tatsache, dass f nur in 0 und 1 verschwindet.

☐ das Vorzeichen von f ist konstant in $]1, \infty[$.

Richtig: das folgt aus der oben Begründung.

14.13. Stetigkeit 1

Damit $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, muss gelten $\forall x \in [2,4] : 2rx - x^2 \geq 0$. Dies ist äquivalent zu $\forall x \in [2,4] : 2r > x$. Notwendige Bedingung ist also $2r \geq 4$, das heisst, $r \geq 2$. f ist auf $[0,4] \setminus \{2\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Die Bedingung für Stetigkeit auf $[0,4]$ ist daher

$$\lim_{2>x\to 2} f(x) = f(2) = \lim_{2<x\to 2} f(x).$$

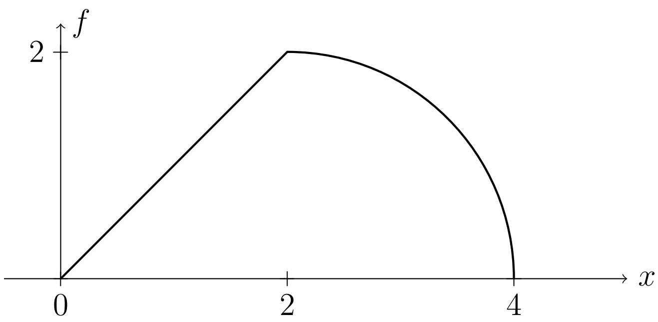
Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{2>x\to 2} f(x) &= \lim_{2>x\to 2} 2x\,r^{-1} = 4r^{-1},\\ \lim_{2<x\to 2} f(x) &= \lim_{2<x\to 2} \sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{4r-4} = 2\sqrt{r-1}.\end{aligned}$$

Die Bedinung lautet also $4r^{-1} = 2\sqrt{r-1}$. Wegen $r \geq 2$ ist dies äquivalent zu $4 = r^2(r-1)$. Wir sehen, dass $r = 2$ die eine gültige Lösung ist. Somit ist f stetig für $r = 2$. Um den Graphen von f zu zeichnen, beobachten wir, dass der Graph von

$$\sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{r^2 - (x-r)^2}$$

Teil des Kreises mit Radius r um den Punkt $(r,0) \in \mathbb{R}^2$ ist. Für $r = 2$ erhalten wir:



14.14. Stetigkeit 2

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ gilt

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 2ax - a}{|x-a| + |x^2 - a^2|} = \frac{x - a + 2x(x-a)}{|x-a| + |(x-a)(x+a)|} = \frac{(x-a)(1+2x)}{|x-a|\big(1 + |x+a|\big)}.$$

Für $x > a$ ist $|x-a| = (x-a)$. Daher gilt

$$\lim_{a>x\to a} f(x) = \lim_{a>x\to a} \frac{1+2x}{1+|x+a|} = \frac{1+2a}{1+|2a|} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \geq 0, \\ \frac{1+2a}{1-2a}, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Für $x < a$ ist $|x-a| = -(x-a)$. Somit gilt

$$\lim_{a<x\to a} f(x) = \lim_{a>x\to a} -\frac{1+2x}{1+|x+a|} = -\frac{1+2a}{1+|2a|} = \begin{cases} -1, & \text{falls } a \geq 0, \\ -\frac{1+2a}{1-2a}, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Im Fall $a \geq 0$, da $1 \neq -1$ sehen wir sofort, dass f an $x_0 = a$ nicht stetig ergänzbar ist.

Im Fall $a < 0$ ist f an $x_0 = a$ stetig ergänzbar, falls links- und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen, das heisst, falls $\frac{1+2a}{1-2a} = -\frac{1+2a}{1-2a}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\frac{1+2a}{1-2a} = 0$, also falls $a = -\frac{1}{2}$.

14.15. Berechnung von Ableitungen

Wir nennen jedes Mal f die bedachte Funktion.

(a) Wir führen die Aufteilung aus:

$$f(x) = \frac{3x^7 + x^5 - 2x^4 + x - 3}{x^4} = 3x^3 + x - 2 + x^{-3} - 3x^{-4};$$

die Ableitung Potenzfunktionen liefert:

$$f'(x) = 9x^2 + 1 - 2 - 3x^{-4} + 12x^{-5} = \frac{9x^7 + x^5 - 3x + 12}{x^5}.$$

(b) Wir sehen, dass

$$f(x) = \frac{x^2(x^2 + 10x + 25)}{(x+5)(x+7)} = \frac{x^2(x+5)^2}{(x+5)(x+7)} = \frac{x^2(x+5)}{x+7};$$

die Quotierenregel liefert:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 10x)(x+7) - x^3 - 5x^2}{(x+7)^2} = \frac{2x^3 + 26x^2 + 70x}{(x+7)^2}.$$

(c) Die Ableitungsregeln (Quotient, Ableitung von $\mathrm{Exp}, \log, \sin$) liefern:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x(x(x+2) + 2) - \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x) + 1}.$$

(d) Die Ableitungsregeln liefern:

$$f'(x) = -\frac{x \sin(\sin(x^2)) \cos(x^2)}{\sqrt{\cos(\sin(x^2)) + 1}}.$$

(e) Nach Definition, gilt:

$$f(x) = 2^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x \log 2},$$

somit ist die Ableitung

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\sin x \log 2} \cos x \log 2 = 2^{\sin x} \cos x \log 2.$$

14.16. Grenzwerte Wir nennen jedes Mal f und g die Funktionen in dem bedachten Grenzwert, d.h. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(a) Der Grenzwert hat Ausdruck $\frac{0}{0}$. Es gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1,$$

somit existiert der Grenzwert und gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

(b) Hier kann man *nicht* die Regel von de l'Hôpital anwenden, weil f und g in 1 nicht verschwinden. Es ist aber ein einfacher Grenzwert, weil der Nenner nicht verschwindet:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x+1} = 0.$$

(c) Der Grenzwert hat Ausdruck $0 \cdot \infty$. Mit den wichtigen Grenzwerten erhalten wir:

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \log x = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \underbrace{x \log x}_{\to 0} = 0.$$

(d) Wir verwenden zweimal die Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1 - \cos x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\cos x} = 2.$$

(e) Hier kann man *nicht* de l'Hôpital benutzen: der Grenzwert

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{3+\sin x}$$

existiert nicht. Weil $|\sin x| \leq 1$, ist die Zähler beschräknt:

$$\log 2 \leq \log(3+\sin x) \leq \log 4,$$

somit

$$\frac{\log 2}{x} \leq \frac{\log(3+\sin x)}{x} \leq \frac{\log 4}{x},$$

also

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log 2}{x}}_{=0} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3+\sin x)}{x} \leq \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log 4}{x}}_{=0}$$

danach $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3+\sin x)}{x} = 0$.

(f) Es gilt, $x^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x \log x}$. Somit sehen wir, dass der Grenzwert Ausdruck $\frac{0}{0}$ hat. Mit der Regel von de l'Hôpital erhalten wir:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\sin x \log x}-1}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\mathrm{e}^{\sin x \log x}}_{\to 1}\Big(\underbrace{\cos x \log x}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\Big) = -\infty.$$

(g) Es gilt

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x} = \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right);$$

wir berechnen den Grenzwert des Arguments mit der Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\sin x}{2x} = 0.$$

Somit ist der Grenzwert gleich $\mathrm{e}^0 = 1$.

14.17. Mittelwertsatz

(a) f_1: Es gilt $f_1'(x) = 6x - 5$ und es ist möglich, den Mittelwertsatz anzuwenden. Wir berechnen:

$$6c - 5 = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = 16,$$

somit erhalten wir, dass der (einzige) untersuchte Punkt $c = 7/2$ ist.

f_2: die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x-4}$ ist differenzierbar und verschwindet nicht in [1,3], damit ist f_2 differenzierbar mit

$$f_2'(x) = \frac{(x-4) - (x+3)}{(x-4)^2} = -\frac{7}{(x-4)^2}.$$

Wir berechnen:

$$-\frac{7}{(c-4)^2} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = -\frac{7}{3}$$

Somit muss $(c-4)^2 = 3$ sein. Die Lösungen dieser Gleichung sind $c = 4 \pm \sqrt{3}$, aber nur $4 - \sqrt{3}$ liegt in $[1, 3]$. Somit ist $c = 4 - \sqrt{3}$ der einzige gesuchte Punkt.

f_3: da $25 - x^2 > 0$ in $[-3, 4]$, ist f_3 differenzierbar in $[-3, 4]$ mit

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} -\frac{c}{\sqrt{25 - c^2}} &= \frac{f(4) - f(-3)}{4 - (-3)} = -\frac{1}{7} \\ &\Rightarrow 7c = \sqrt{25 - c^2} \\ &\Rightarrow 49c^2 = 25 - c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Beide Lösungen $c = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ dieser Gleichung liegen in $[-3, 4]$ und sind somit die gesuchten Punkte.

(b) Wir müssen zeigen, dass für $x > 0$ gilt:

$$\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

Wir betrachten dazu die Funktion $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Dann ist f differenzierbar für $x > -1$ und es gilt $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+1}}$.

Ausserdem ist $f(0) = 1$.
Also gilt nach dem Mittelwertsatz, dass für jedes $x > 0$ ein $u \in (0, x)$ existiert mit

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(u) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u+1}} < \frac{1}{2}, \qquad \text{da } u > 0.$$

Also gilt $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ wie behauptet.

(c) *Behauptung 1:* Es gilt $\log(x) \leq x - 1$ für alle $x > 0$.

Wir wenden den Mittelwertsatz auf $f(x) = \log(x)$ an. Wir machen folgende Fallunterscheidungen:

<u>1. Fall: $0 < x < 1$.</u> Es gilt für $0 < x < 1$:

$$\log(x) \leq x - 1 \iff \frac{\log(x)}{x-1} \geq 1.$$

(Achtung, wir dividieren durch eine negative Zahl, daher "wechselt" die Ungleichung.)
Weil $\log(1) = 0$, gilt nach dem Mittelwertsatz, dass ein $u \in (x, 1)$ existiert mit

$$\frac{\log(x)}{x-1} = \frac{\log(x) - \log(1)}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(u) = \frac{1}{u}.$$

Weil aber $u \in (x, 1)$ ist, gilt $\frac{1}{u} > 1$, also gilt die Ungleichung in diesem Fall. Das heisst, es folgt $\log(x) \leq x - 1$ für $0 < x < 1$.

<u>2. Fall: $x = 1$.</u> Es gilt $\log(1) = 0 = 1 - 1$, d.h. die Ungleichung gilt für $x = 1$.

<u>3. Fall: $x > 1$.</u> Hier gilt

$$\log(x) \leq x - 1 \Leftrightarrow \frac{\log(x)}{x-1} \leq 1,$$

Nun gilt nach dem Mittelwertsatz, dass ein $u \in (1, x)$ existiert mit

$$\frac{\log(x)}{x-1} = \frac{\log(x) - \log(1)}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(u) = \frac{1}{u}.$$

Weil aber $u > 1$ gilt $\frac{1}{u} < 1$, also stimmt die Ungleichung auch in diesem Fall.
Dies zeigt Behauptung 1.

Behauptung 2: Es gilt $1 - \frac{1}{x} \leq \log(x)$ für alle $x > 0$.
Sei $x > 0$. Wir wenden Behauptung 1 für $y = \frac{1}{x}$ an.
Damit erhalten wir

$$-\log(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right) = \log(y) \overset{\text{Beh.1}}{\leq} y - 1 = \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \log(x) \geq 1 - \frac{1}{x},$$

wie behauptet.

14.18. Umkehrsatz

(a) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, somit ist f streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$ und umkehrbar. Dazu gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

somit ist f bijektiv von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}$. Weil

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 1,$$

mit dem Kettenregel erhalten wir:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2},$$

und

$$\begin{aligned}(f^{-1})''(1) = \left(\frac{1}{f'\circ f^{-1}}\right)'(1) &= -\frac{(f'\circ f^{-1})'(1)}{[(f'\circ f^{-1})(1)]^2} = -\frac{f''(0)(f^{-1})'(1)}{(f'(0))^2}\\ &= -\frac{1/2}{4} = -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

(b) Wir definieren die Funktion $\phi(x) = (x-1)\mathrm{e}^x - (x+1)\mathrm{e}^{-x}$: wir sehen, dass $\phi'(x) = x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, somit

$$\begin{aligned}&\phi'(x) < 0 \quad \text{in } (-\infty, 0) \Rightarrow \phi \text{ streng fallend in } (-\infty,0) \text{ und}\\ &\phi'(x) > 0 \quad \text{in } (0, +\infty) \Rightarrow \phi \text{ streng wachsend in } (0,+\infty).\end{aligned}$$

Weil

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \phi(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \phi(0) = -2,$$

aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass genau zwei Punkten $x_1 \in (-\infty, 0)$ und $x_2 \in (0, +\infty)$ existieren, so dass $\phi(x_1) = 0$, $\phi(x_2) = 0$, d.h. die Gleichung hat genau zwei Lösungen in $\mathbb{R}$.

14.19. Taylorpolynom Wir nennen jedes Mal f die bedachte Funktion. Das Taylorpolynom ist

$$\begin{aligned}P_4(f, x_0)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) &+ \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3\\ &+ \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.\end{aligned}$$

(a) Wir berechnen:

$$f'(x) = -(1+x)^{-2}, \qquad f''(x) = 2(1+x)^{-3},$$
$$f'''(x) = -6(1+x)^{-4}, \qquad f^{(4)}(x) = 24(1+x)^{-5},$$

somit an der Stelle $x_0 = 0$ erhalten wir:

$$P_4(f,0)(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

(b) Nach Definition gilt

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \tag{4}$$

somit erhalten wir:

$$\text{für jedes gerade } k, \quad \frac{\mathrm{d}^k \cosh x}{\mathrm{d}x^k} = \cosh x, \quad \frac{\mathrm{d}^k \sinh x}{\mathrm{d}x^k} = \sinh x,$$
$$\text{für jedes ungerade } k, \quad \frac{\mathrm{d}^k \cosh x}{\mathrm{d}x^k} = \sinh x. \quad \frac{\mathrm{d}^k \sinh x}{\mathrm{d}x^k} = \cosh x$$

Da $\sinh 0 = 0$ und $\cosh 0 = 1$ schliessen wir, dass

$$P_4(\cosh,0)(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \text{und} \quad P_4(\sinh,0)(x) = x + \frac{x^3}{3!}.$$

(c) Wir können entweder die ersten vier Ableitungen berechnen, oder aber die Potenzreihenentwicklung von cos und e^x verwenden. Das Berechnen der Ableitungen ist v.a. für die höheren Ableitungen sehr aufwändig. Falls man dies trotzdem macht ergeben sich sehr lange Terme von denen fast alle in $x = 0$ Null sind und schliesslich ergibt sich:

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = -12$$

und man kann

$$P_4(f,0)(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4$$

berechnen. Besser benutzt man die Potenzreihenentwicklung um den Nullpunkt (beachte: für $x = 0$ ist $e^{x^2} - 1 = 0$, deshalb müssen wir auch den cos um Null entwickeln). Da wir nur das Taylorpolynom 4. Ordnung von f berechnen wollen, brauchen wir auch nur die Tayolorpolynome der Ordnung 4.
Es ist:

$$P_4(\cos(y),0)(x) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!}$$

und aus der Potenzreihenentwicklung von e^x erhalten wir

$$P_4(e^{x^2}-1,0)(x) = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} - 1 = x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$

Damit gilt

$$P_4(\cos(P_4(e^{x^2}-1,0),0)(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2+\frac{1}{2}x^4)^2 + \frac{1}{4!}\cdot(x^2+\frac{1}{2}x^4)^4 = 1 - \frac{1}{2}x^4$$
$$+ \text{Potenzen höherer Ordnung}$$

Also ist das Taylorpolynom 4. Ordnung

$$P_4(f,0)(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4.$$

(d) Wir erinnern uns die Identitäten $\tan(x)' = 1 + \tan^2(x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log\cos x,\\
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \log\cos(\frac{\pi}{4}\Big) = \log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\log 2,\\
f'(x) &= \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x,\\
f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1,\\
f''(x) &= -(1+\tan^2(x)),\\
f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -(1+\tan^2(\pi/4)) = -2,\\
f'''(x) &= -2\tan(x)(1+\tan^2(x)) = -2\tan(x) - 2\tan(x)^3,\\
f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -4,\\
f^{(4)}(x) &= -2(1+\tan(x)^2) - 6\tan^2(x)(1+\tan^2(x)),\\
f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -4-12 = -16.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
P_4\left(f,\frac{\pi}{4}\right)(x) &= -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{1!}(x-\frac{\pi}{4}) + -\frac{2}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{4}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{-16}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4\\
&= -\frac{1}{2}\log 2 - (x-\frac{\pi}{4}) - (x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{4})^3 - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{4})^4.
\end{aligned}$$

14.20. Annäherung mit Taylor *Bemerkung:* Wenn man sagt, dass eine Approximation "exakt bis n Nachkommastellen ist", meint man, dass $n-1$ Nachkommastellen gewiss exakt sind. Die n-te Nachkommastelle könnte falsch sein!

(a) Die Funktion $x \mapsto \log(1+x)$ ist eine C^∞-Funktion (d.h. beliebig oft differenzierbar) in $(-1, +\infty)$, somit können wir für jedes n die Formel von Taylor n-ter Ordnung für $\log(1+x)$ an der Stelle 0 betrachten. Bekanntlich, oder durch direkte Berechnung, ist die Formel

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(0,x),$$

wo das Restglied gegeben ist durch

$$R_n(0,x) = (-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}$$

für ein $\xi \in (0,x)$. In unserem Fall ist $x = 0.1$, und um 3 exakte Nachkommastellen zu erhalten, ist es notwendig, dass

$$|R_n(0,0.1)| = \frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}10^{-(n+1)} < 0.0005 = \frac{10^{-3}}{2}.$$

Weil $\xi \in (0, 0.1)$, gilt $\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} < 1$, somit

$$|R_{n+1}(0,0.1)| < \frac{1}{n+1}10^{-n+1},$$

daraus folgt $n+1 > 3$, somit $n \geq 3$. Wir erhalten die Annäherung

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\frac{1}{10^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{10^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{10^4} = \frac{11437}{120000} = 0.0953083.$$

Weil $0.0953083 + \frac{10^{-3}}{2} = 0.0958083$, gibt es keinen Übertrag in der Addition: das stellt sicher, dass die ersten 3 Nachkommastellen der obigen Annäherung exakt sind.

(b) Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ist eine C^∞-Funktion in $(0, +\infty)$, somit können wir für jedes n die Formel von Taylor n-ter Ordnung für $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 64$ betrachten:

$$\begin{aligned} f(x) = f(64) + f'(64)(x-64) + \frac{f''(64)}{2!}(x-64)^2 + \ldots \\ + \frac{f^n(64)}{n!}(x-64)^n + R_n(64,x), \end{aligned}$$

wo das Restglied gegeben ist durch

$$R_n(64,x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-64)^{n+1}$$

für ein $\xi \in (64,x)$. Wir sehen, dass

$$\frac{\mathrm{d}(\sqrt[3]{x})}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2(\sqrt[3]{x})}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2}{3^2}x^{-\frac{5}{3}},$$
$$\frac{\mathrm{d}^3(\sqrt[3]{x})}{\mathrm{d}x^3} = \frac{2\cdot 5}{3^3}x^{-\frac{8}{3}}, \qquad \frac{\mathrm{d}^4(\sqrt[3]{x})}{\mathrm{d}x^4} = -\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4}x^{-\frac{11}{3}},$$

und so weiter. Durch Induktion erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}^k(\sqrt[3]{x})}{\mathrm{d}x^k} = (-1)^{k+1}\frac{(3-1)(6-1)\cdots(3(k-1)-1)}{3^k}x^{-k+\frac{1}{3}},$$

somit in unserem Fall mit $x = 65$ erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}|R_n(64,x)| = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{(3-1)(6-1)\cdots(3n-1)}{3^{n+1}}\xi^{-(n+1)+\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{3-1}{3}\cdot\frac{6-1}{3}\cdots\frac{3n-1}{3}\cdot\frac{1}{3}\xi^{-(n+1)+\frac{1}{3}} \\ &\le \frac{n!}{(n+1)!}\frac{1}{3}64^{-(n+1)+\frac{1}{3}} = \frac{1}{n+1}\frac{4}{3}64^{-(n+1)},\end{aligned}$$

daraus folgt, dass n so gewählt werden muss, dass

$$\frac{1}{n+1}\frac{4}{3}64^{-(n+1)} < 0.000005 = \frac{10^{-5}}{2},$$

insbesondere $n+1 > \log_{64} 10^5 \approx 2.76$, somit $n \ge 2$. Mit $n = 2$ erhalten wir die Annäherung

$$\sqrt[3]{64} + \frac{1}{3(\sqrt[3]{64})^2} - \frac{2}{9(\sqrt[3]{64})^5} = 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9216} = \frac{37055}{9216} = 4.02072.$$

Weil $4.02072 + \frac{10^{-5}}{2} = 4.020725$, gibt es keinen Übertrag in der Addition: das stellt sicher, dass die ersten 5 Nachkommastellen der obigen Annäherung exakt sind.

14.21. Eine wichtige Schranke

(a) Es gilt

$$|S(f,P,\xi)| \le \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\,(x_i - x_{i-1}) \le M(b-a),$$

für jede Einteilung und jede Wahl von Zwischenpunkten.

14.22. Durch Integrale definierte Funktionen Wie bekannt, lautet der Hauptsatz der Integralrechnung, dass für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $c \in [a, b]$ die Funktion $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ differenzierbar ist mit Ableitung $F'(x) = f(x)$.

Wir betrachten A als Komposition: $A = (\phi \circ \beta)(x)$, wobei

$$\phi(x) = \int_0^x \cos(\mathrm{e}^{2t} + 2t)\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \beta(x) = x^7 + \mathrm{e}^x.$$

Die Kettenregel und der Hauptsatz der Integralrechnung liefern demnach:

$$A'(x) = \phi'(\beta(x))\beta'(x) = \cos(\exp(2(x^7 + \mathrm{e}^x)) + 2(x^7 + \mathrm{e}^x))(7x^6 + \mathrm{e}^x).$$

Was B betrifft, so können wir uns wegen der Additivität des Integrals:

$$\int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{x^2+1}^{c} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad (c \text{ belibig}),$$

B als

$$B(x) = (\phi_1 \circ \beta_1)(x) + (\phi_2 \circ \beta_2)(x)$$

denken, wobei

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \int_x^c \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, = -\int_c^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t & \beta_1(x) &= x^2 + 1,\\
\phi_2(x) &= \int_c^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, & \beta_2(x) &= x^2 + 5.
\end{aligned}$$

Nochmals durch die Kettenregel und den Hauptsatz der Integralrechnung schliessen wir, dass

$$\begin{aligned}
B'(x) &= \phi_1'(\beta_1(x))\beta_1'(x) + \phi_2'(\beta_2(x))\beta_2'(x)\\
&= -\frac{\sin(x^2+1)}{x^2+1}2x + \frac{\sin(x^2+5)}{x^2+5}2x.
\end{aligned}$$

14.23. Berechnung von Integrale

(a)

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{2 - x^2 + x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^4 \left(2x^{-1} - x + 1\right)\,\mathrm{d}x\\
&= \left[2\log|x| - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{x=1}^4\\
&= 2\log 4 - 8 + \frac{1}{2} + 4 - 1 = 4\log 2 - \frac{9}{2}\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_1^9 (\sqrt{x}-1)(x+1)\,\mathrm{d}x &= \int_1^9 x^{3/2} - x + x^{1/2} - 1\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2} - x\right]_{x=1}^9 \\ &= \frac{2}{5}(3^5-1) - \frac{1}{2}(9^2-1) + \frac{2}{3}(3^3-1) - 9 + 1 \\ &= \frac{484}{5} - 40 + \frac{52}{3} - 8 \;=\; \frac{992}{15}\,.\end{aligned}$$

(c) Wie in 10.4 (c) berechnet,

$$\int \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\cos x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(d) Wir integrieren partiell:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underset{\downarrow}{t^2}\,\underset{\uparrow}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\sin(2t)t^2\right]_0^1 - \int_0^1 \underset{\uparrow}{\sin(2t)}\underset{\downarrow}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\sin(2) - \left(-\frac{1}{2}\left[\cos(2t)t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 -\cos(2t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2) - \left(-\frac{1}{2}\cos(2) + \left[\frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^1\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{2}\cos(2) - \frac{1}{4}\sin(2) = \frac{1}{4}(\sin(2) + 2\cos(2)).\end{aligned}$$

(e) Wir teilen den Burch auf:

$$\frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{2}.$$

Weil $\tan(x)' = \frac{1}{\cos(x)^2}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 1\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\tan(x)\right]_0^{\pi/4} - \frac{\pi}{8} \;=\; \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\,.\end{aligned}$$

(f) Wie in 10.4 (b) berechnet,

$$\int (x^3+5x+1)^{1291}(3x^2+5)\,\mathrm{d}x = \frac{(x^3+5x+1)^{1292}}{1292} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(g) Wir integrieren zwei Mal partiell bis wir auf der rechten Seite wieder das Integral der linken Seite (mit anderem Faktor) finden:

$$\begin{aligned}
I &= \int \underset{\downarrow}{\mathrm{e}^{5x}} \underset{\uparrow}{\sin(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\mathrm{e}^{5x} - 5 \int -\underset{\downarrow}{\mathrm{e}^{5x}} \underset{\uparrow}{\cos(x)} \,\mathrm{d}x + C \\
&= -\cos(x)\mathrm{e}^{5x} + 5e^{5x}\sin(x) - 25 \int e^{5x}\sin(x)\,\mathrm{d}x + C \\
&= -\cos(x)\mathrm{e}^{5x} + 5\mathrm{e}^{5x}\sin(x) - 25I + C,
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\int \mathrm{e}^{5x}\cos(x)\,\mathrm{d}x = I = \frac{1}{26}(5\mathrm{e}^{5x}\sin(x) - \mathrm{e}^{5x}\cos(x)) + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

(h) Wie in 10.4 (d) berechnet,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+5x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sqrt{1+5x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$