15.1. Folgen und Reihen

(a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

Falsch: Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

☐ Jede beschränkte Folge ist konvergent.

Falsch: Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

☐ Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Richtig: Dies folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

☐ Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

Richtig: Das ist die Kontraposition der vorhergehenden Aussage. Sie folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

☐ Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\{1, 2, 3, \dots\}$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = a_{\sigma(n)}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Richtig: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Es gilt

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon : |\alpha - a_n| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

Wir definieren $m_\epsilon = \max(\{k : \sigma(k) \leq n_\epsilon\})$. Es ist $m_\epsilon < \infty$, weil $n_\epsilon < \infty$ und σ eine Bijektion ist. Dann gilt $|\alpha - b_n| = |\alpha - a_{\sigma(n)}| \leq \epsilon \quad \forall n \geq m_\epsilon$. Somit folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

(b) Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Die Folge ist monoton wachsend.

Richtig: Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2(n+1)}{(n+2)n^2} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3 + 2n^2} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt $a_{n+1} > a_n$.

☐ Die Folge ist beschränkt.

Falsch: Für alle $n \geq 1$ gilt $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ und damit

$$a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n\frac{n}{n+1} \geq \frac{3}{4}n.$$

Also ist (a_n) unbeschränkt.

☐ Die Folge ist divergent.

Richtig: Aus der Abschätzung $a_n \geq \frac{3}{4}n$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ gilt und dass folglich (a_n) divergent ist.

☐ Die Folge besitzt keinen Limes in $\mathbb{R}$.

Richtig: Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Da der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist, wenn er existiert (egal ob im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne), besitzt (a_n) keinen Limes in $\mathbb{R}$.

(c) Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Welche der folgenden Aussagen gelten?

☐ Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Richtig: Dies folgt z.B. daraus, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.

☐ Wenn die Folge $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Falsch: Ein Gegenbeispiel ist $a_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Dann ist nämlich $(a_{n+1} - a_n = 1/(n+1))$ eine Nullfolge, aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

☐ Jede beschränkte Folge hat unendlich viele konvergente Teilfolgen.

Richtig: Der Satz von Bolzano-Weierstrass sagt, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Durch Weglassen der ersten Glieder dieser Teilfolge erhält man unendlich viele konvergente Teilfolgen.

(d) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe mit $\forall k \in \mathbb{N}: \ a_k \leq 0$. Die Reihe konvergiert...

☐ ...genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach unten beschränkt ist.

Richtig.

☐ ...genau dann, wenn (a_k) eine monoton wachsende Nullfolge ist.

Falsch.

☐ ..., falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq n_0 : |a_k| < \varepsilon$.

Falsch.

Hier ist die Folge der Partialsummen monoton fallend. Ist sie zusätzlich noch nach unten beschränkt, dann ist sie konvergent.

(e) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{n}} \cdot z^n$ ist auf dem Rand ihres Konvergenzkreises.

☐ überall absolut konvergent.

Richtig.

☐ überall konvergent, aber nicht überall absolut konvergent.

Falsch.

☐ überall konvergent ausser in endlich vielen Punkten.

Falsch.

☐ nirgendwo konvergent.

Falsch.

Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{2^n}{n\sqrt{n}} \Big/ \frac{2^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}\ \Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{n})^{3/2}\Big) = \frac{1}{2}$$

Für $|z| = \frac{1}{2}$ ist $\left|\frac{2^n}{n\sqrt{n}} \cdot z^n\right| = \frac{1}{n\sqrt{n}}$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergiert absolut. Also ist (a) richtig.

(f) Es gilt, dass $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ nicht absolut konvergiert. Kann man daraus ableiten, dass $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nicht absolut konvergiert?

☐ Ja.

Richtig: Die Partialsumme $\sum_{n=1}^{N^2} \frac{1}{\sqrt{n}}$ enthält die Partialsumme $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

☐ Nein.

Falsch: Die Partialsumme $\sum_{n=1}^{N^2} \frac{1}{\sqrt{n}}$ enthält die Partialsumme $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

(g) Sei $0 \leqslant q < 1$. Was sagt das Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geqslant 1} n^{1000} q^n$ aus?

☐ "Die Reihe konvergiert."

Richtig: Der Quotient zweier benachbarter Folgeglieder konvergiert gegen q.

☐ "Die Reihe divergiert."

Falsch.

☐ Nichts.

Falsch.

(h) Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren $b_n = a_{n+N_0}$, wobei $N_0 = 100$. Wählen Sie die richtigen Antworten.

☐ Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$, und die Grenzwerte müssen zusammenfallen.

Richtig: b_n ist eine Teilfolge von a_n, und weil a_n konvergiert, muss b_n nach den gleichen Grenzwert konvergieren.

☐ Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$, aber es ist nicht nötig, dass die Grenzwerte gleich sind.

Falsch: b_n ist eine Teilfolge von a_n, und weil a_n konvergiert, muss b_n gegen den gleichen Grenzwert von $(a_n)_n$ konvergieren.

☐ $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} b_n$ existiert.

Richtig: Aus der Definition von Konvergenz einer Folge $(a_n)_n$ sieht man, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$, der Grenzwert nicht von ersten N Gliedern, also $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+N}$ abhängt. In unserem Fall, $N = 100$.

(i) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation der natürlichen Zahlen und sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren die Folge $b_n = a_{f(n)}$.

☐ Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Richtig.

☐ Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$ aber es muss nicht unbedingt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ sein.

Falsch.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Es gilt

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon : |\alpha - a_n| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

Wir definieren $m_\epsilon = \max(\{k : f(k) \leq n_\epsilon\})$. Es ist $m_\epsilon < \infty$, weil $n_\epsilon < \infty$ und f eine Bijektion ist. Dann gilt $|\alpha - b_n| = |\alpha - a_{f(n)}| \leq \epsilon \quad \forall n \geq m_\epsilon$. Somit folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

15.2. Funktionen

(a) Welche der folgenden Aussagen gilt?

☐ Es existiert eine Surjektion $\{0, 3, 333\} \to \{0, 1\}$.

Richtig: Z.B. definiert die Vorschrift $0 \mapsto 0$, $3 \mapsto 0$, $333 \mapsto 1$ eine Surjektion.

☐ Es existiert eine Surjektion $\{x \in \mathbb{R} |\; x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0, 1\} \to \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n^3 \leq 100\}$.

Falsch: Der Definitionsbereich ist die Menge $\{0, 1, 3\}$, der Wertebereich ist die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Aus der Definition der Surjektivität folgt aber, dass der Wertebereich nicht mächtiger sein kann als der Definitionsbereich. In anderen Worten, das Bild einer drei-elementigen Menge unter einer Abbildung kann höchstens drei Elemente, aber nicht vier Elemente, enthalten.

☐ Es existiert eine Injektion $\mathbb{N} \to \{x \in \mathbb{R} |\; 0 < x < 1\}$.

Richtig: Z.B. ist $n \mapsto 1/(2n)$ eine solche.

(b) Seien X, Y Mengen. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist surjektiv genau dann, wenn gilt

☐ Das Bild $f(A)$ einer nichtleeren Teilmenge A ist nicht leer.

Falsch: Nicht jede Funktion ist surjektiv, aber das Bild einer nichtleeren Menge ist immer nicht leer.

☐ Die Bilder $f(A_1)$, $f(A_2)$ von zwei disjunkten Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ sind wieder disjunkt.

Falsch: Z. B. ist $f : \{1\} \to \{1, 2\}$ definiert durch $f(1) = 1$ nicht surjektiv, aber die Bilder zweier disjunkter Mengen sind disjunkt.

☐ Für jede nichtleere Teilmenge B von Y ist $f^{-1}(B)$ nicht leer.

Richtig: Nach Definition ist f surjektiv genau dann, wenn $\forall y \in Y\ \exists x \in X\ f(x) = y$.

Für eine nichtleere Teilmenge $B \subseteq Y$ existiert ein $y \in B$ und zu diesem ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Daher ist $x \in f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(B)$ ist nicht leer.

Umgekehrt: Wenn das Urbild nichtleerer Mengen nicht leer ist, dann gilt für jedes $y \in Y$, dass $f^{-1}(\{y\})$ nicht leer ist, und daher gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, was zu beweisen war.

☐ Wenn $B_1, B_2 \subseteq Y$ zwei disjunkte Teilmengen von Y sind, dann sind $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(B_2)$ wieder disjunkt.

Falsch: Nicht jede Abbildung ist surjektiv. Doch das Urbild von disjunkten Mengen ist immer disjunkt: Wenn $B_1, B_2 \subseteq Y$ disjunkt sind, dann würde $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ den Widerspruch $f(x) \in B_1 \cap B_2$ zur Folge haben.

(c) Sei I ein beliebiges (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit Bildmenge $f(I)$. Seien $a := \inf f(I)$ und $b := \sup f(I)$. Welche der Folgerungen ist immer richtig?

☐ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in I$ so dass $0 \leq f(x) - a \leq \varepsilon$ gilt.

☐ Für jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $a \leq y \leq b$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in I$ so dass $|f(x) - y| \leq \varepsilon$ gilt.

☐ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in I$ so dass $0 \leq f(x) - b \leq \varepsilon$ gilt.

☐ Keine der obigen, sofern f nicht stetig ist.

Die in (a) gegebene Ungleichung ist äquivalent zu $a \leq f(x) \leq a + \varepsilon$. Der linke Teil $a \leq f(x)$ gilt für alle $x \in I$, weil a eine untere Schranke an $f(I)$ ist. Dass a nach Definition sogar die *grösste* untere Schranke an $f(I)$ ist, impliziert, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in I$ gibt, so dass der rechte Teil $f(x) \leq a + \varepsilon$ gilt. Also ist (a) immer richtig.

Für jede stetige Funktion ist (b) aufgrund des Zwischenwertsatzes richtig, im Allgemeinen aber nicht. Wenn z.B. $f : I \to \mathbb{R}$ genau zwei verschiedene Werte annimmt, die dann notwendigerweise gleich a bzw. b sind, hat $f(x)$ für alle $x \in I$ einen echt positiven Abstand von jeder Zahl in $]a, b[$.

Die Ungleichung in (c) ist äquivalent zu $b \leq f(x) \leq b + \varepsilon$. Wenn sie für ein $x \in I$ erfüllt ist, folgt schon $f(x) = b$, weil $b = \sup f(I)$ nach Definition insbesondere eine obere Schranke an $f(I)$ ist. Also wird das Supremum angenommen und ist mithin das Maximum von f. Da nicht jede Funktion f ein Maximum besitzt, ist (c) im Allgemeinen nicht richtig.

(d) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- ☐ Wenn f und g injektiv sind so ist auch $g \circ f$ injektiv.

  Falsch.

- ☐ Wenn zwei der Abbildungen $f, g, g \circ f$ bijektiv sind, dann ist auch die dritte bijektiv.

  Falsch.

- ☐ Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch g injektiv.

  Richtig.

- ☐ Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.

  Falsch.

Die Aussagen (a), (b), (d) sind wahr. Nur (c) ist falsch: wenn zum Beispiel $Z = X$ eine echte Teilmenge von Y ist, $f : X \to Y$ die Inklusion ist, und $g : Y \to X$ auf der Teilmenge $X \subset Y$ die Identität ist, so ist $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und g kann nicht injektiv sein.

(e) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \frac{1-x}{x+3}$. Dann gilt:

- ☐ Die Funktion f ist auf $(-\infty, -3)$ streng monoton fallend.

  Richtig.

- ☐ Die Funktion f ist auf $(-3, \infty)$ streng monoton fallend.

  Richtig.

- ☐ Die Funktion f nimmt auf $(-\infty, -3)$ nur negative Werte an.

  Richtig.

- ☐ Die Funktion f nimmt auf $(-3, \infty)$ nur positive Werte an.

  Falsch.

- ☐ Keine Aussage ist korrekt.

  Falsch.

f ist auf $(-\infty, -3)$ monoton fallend falls dort $f'(x) \leq 0$ gilt. Durch Berechnen von $f'(x)$ und Vereinfachen von der Ungleichung $f'(x) \leq 0$ (unter Verwendung umkehrbarer Umformungen und der notwendigen Fallunterscheidungen abhängig vom Nenner) erhält man (a). (b) und (c) folgen auf die gleiche Weise und (d) wird ebenso widerlegt.

(f) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Falls f differenzierbar ist, so ist $x \mapsto f(|x|)$ auch differenzierbar.

☐ Wahr

Falsch.

☐ Falsch

Richtig.

Die Aussage ist falsch. Betrachte zum Beispiel die Funktion $f(x) = x$, sie ist Differenzierbar, aber $f(|x|) = |x|$ ist im Punkt 0 nicht differenzierbar da $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ nicht existiert.

(g) Sei $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$,dann ist f im Nullpunkt

☐ differenzierbar und stetig.

Falsch.

☐ differenzierbar und nicht stetig.

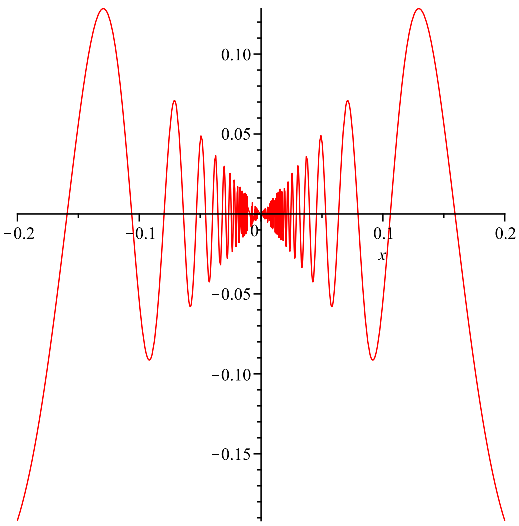
Falsch.

☐ nicht differenzierbar und nicht stetig.

Falsch.

☐ nicht differenzierbar und stetig.

Richtig.



Graph von $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}\end{aligned}$$

und der letzte Grenzwerte existiert nicht da die Funktion oszilliert. Also ist die Funktion im Punkt 0 nicht differenzierbar. Nun überprüfen wir die Stetigkeit der Funktion, dafür sei $\epsilon > 0$ und $|x - 0| < \delta$, wobei wir $\delta = \epsilon$ wählen. Dann ist

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \le |x| < \delta = \epsilon,$$

also ist die Funktion stetig im Punkt 0.

(h) Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^{1/2} + n^{-1})^2.$$

Welche der Aussagen gilt?

☐ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\ge 0}$

Richtig: Es gilt $\lim_{n\to\infty} (x^{1/2} + n^{-1})^2 = (\lim_{n\to\infty} (x^{1/2} + n^{-1}))^2 = (x^{1/2})^2 = x$.

☐ Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.

Falsch: Aus $|f_n(x)-x| = 2x^{1/2}/n+1/n^2$ folgt, dass für $x > n^2$ auch $|f_n(x)-x| > 2$ ist. Also kann (f_n) nicht gleichmässig konvergiern.

☐ Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0,M]} : [0, M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

Richtig: Es gilt $|f_n(x)-x| = 2x^{1/2}/n+1/n^2 \leq 2M^{1/2}/n+1/n^2$ für alle $x \in [0, M]$. Es folgt, dass $(f_n|_{[0,M]})$ gleichmässig konvergiert.

(i) Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f \circ g$ differenzierbar ist. Ist dann mindestens eine der beiden Funktionen f, g notwendigerweise differenzierbar?

☐ Ja.

Falsch.

☐ Nein.

Richtig.

Gegenbeispiel: Betrachten Sie die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Mit $f = g = H$ gilt es $f \circ g \equiv 1$, aber H ist nicht differenzierbar in 0.

(j) Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$ für $x \in]0, \infty[$ ist ...

☐ $f'(x) = x^x$.

☐ $f'(x) = x^{x-1}$.

☐ $f'(x) = x^2$.

☐ $f'(x) = (1 + \log x)x^x$.

☐ $f'(x) = x + x \log x$.

☐ keiner der obigen Ausdrücke.

Es gilt $f(x) = x^x = e^{x \log x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$f'(x) = (x \log x)' e^{x \log x} = \left(\frac{x}{x} + \log x\right) e^{x \log x} = (1 + \log x)x^x.$$

(k) Welche der folgenden Schlussfolgerungen über eine differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist FALSCH?

- ☐ Ist f monoton wachsend, so ist $f' \geq 0$.
- ☐ Ist $f' = 0$, so ist f konstant.
- ☐ Ist $f' > 0$ auf $]a,b[$, so ist f streng monoton wachsend.
- ☐ Ist f streng monoton fallend, so ist $f' < 0$ auf $]a,b[$.

Die Aussagen (a) bis (c) folgen alle aus dem Mittelwertsatz. Aber (d) ist falsch: Ist f streng monoton fallend, so folgt zwar $f' \leq 0$ auf $]a,b[$, aber f' kann in isolierten Punkten verschwinden. Beispiel: $f(x) = -x^3$.

(l) Was genau besagt der Zwischenwertsatz?

- ☐ Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a,b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.
- ☐ Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a,b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.
- ☐ Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f im Intervall $[a,b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.
- ☐ Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $]a,b[$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

(b) ist richtig. In (a) fehlt die Stetigkeit, in (c) die Randbedingung. Dann (a) und (c) sind falsch. (d) ist zum Beispiel dann falsch, wenn $f(a) = 0$ gilt und f streng monoton wächst, wie bei der Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto x$.

(m) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \ \vee \ x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \neq 0 \text{ und } \ p, q \text{ teilerfremd} \end{cases}.$$

Welche der Aussagen gilt?

- ☐ Sei $E = \sqrt{3}\mathbb{Q} = \{\sqrt{3}q | q \in \mathbb{Q}\}$. Dann gilt $\lim_{E \ni x \to 1} f(x) = 0$.

  Richtig: Da $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ist $f(x) = 0$ für alle $x \in E$. Es folgt, dass der Grenzwert ebenfalls 0 ist.

☐ Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Richtig: Aus dem archimedischen Prinzip schliesst man, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists \epsilon > 0 \forall p \in \mathbb{Z} \forall q \in \mathbb{N} \quad 0 < \left| \frac{p}{q} - x_0 \right| < \epsilon \Rightarrow q \geq N \ .$$

Daraus folgt, dass f an jeder Stelle x_0 den Grenzwert 0 hat.

☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Falsch: Gegeben $\epsilon < 1$ existiert keine Umgebung $U = (C, +\infty)$ von $+\infty$, für die gilt $x_0, x_1 \in U \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon$: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > C$. Dann sind $n, \sqrt{2}n \in U$ und $f(n) = 1$, $f(\sqrt{2}n) = 0$. Also existiert der Grenzwert von f für $x \to +\infty$ nicht.

☐ f ist an der Stelle $x = 1$ stetig.

Falsch: Es gilt $\{x \in \mathbb{R} |\ f \text{ nicht stetig in } x\} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, da $f(x_0) = 1/q \neq 0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ist, wenn q der (gekürzte) Nenner von $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist.

(n) Seien f_1, f_2 stetige Funktionen und seien g_1, g_2 unstetige Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Dann gilt:

☐ $f_1 + f_2$ ist stetig.

Richtig: Aus der Stetigkeit von f_1 und f_2 folgt, dass $\lim_{x \to x_0} (f_1 + f_2)(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = (f_1 + f_2)(x_0)$ und somit ist $f_1 + f_2$ stetig.

☐ $f_1 + g_1$ ist stetig.

Falsch: Sei z.B. $f_1 = 0$, dann ist $f_1 + g_1 = g_1$ unstetig.

☐ $g_1 + g_2$ ist unstetig.

Falsch: Sei $g_2 = -g_1$. Dann ist $g_1 + g_2 = g_1 - g_1 = 0$ stetig.

☐ $f_2 + g_2$ ist unstetig.

Richtig: O.B.d.A sei g_2 an der Stelle x_0 unstetig, d.h. $\lim_{x \to x_0} g_2(x) \neq g_2(x_0)$. Dann gilt, dass $\lim_{x \to x_0} (f_2 + g_2)(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) + \lim_{x \to x_0} g_2(x) = f_2(x_0) + \lim_{x \to x_0} g_2(x) \neq f_2(x_0) + g_2(x_0)$. Somit hat die Funktion $f_2 + g_2$ die gleichen Unstetigkeitsstellen wie die Funktion g_2.

☐ $f_1 + f_2 + g_1 + g_2$ ist stetig.

Falsch: Seien z.B $f_1 = -f_2$, $g_1(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } x < 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \\ 1, & \text{für } x > 0 \end{cases}$ und $g_2(x) = \operatorname{sgn}(|x|) = \begin{cases} 0, & \text{für } x = 0 \\ 1, & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$. Dann ist $f_1 + f_2 + g_1 + g_2 = \operatorname{sgn}(x) + \operatorname{sgn}(|x|) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0 \\ 2, & \text{für } x > 0 \end{cases}$ für $x = 0$ unstetig.

(o) Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$, $(x_n)_n \subset X$ eine Cauchy-Folge und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Welche der Aussagen gilt?

☐ Wenn f stetig ist, dann ist $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge.

Falsch: Z.B. ist $x_n = 1/n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto x^{-1}$, ist stetig. Aber $(f(x_n) = n)_n$ ist keine Cauchy-Folge.

☐ Wenn f gleichmässig stetig ist, dann ist $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge.

Richtig: Sie $d_X(x_1, x_2) = d_Y(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$. Sei $\epsilon > 0$. Wir zeigen, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n \geq N$ $d_Y(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$ gilt: Da f gleichmässig stetig ist, existiert $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in X$ die Implikation $d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$ gilt. Da $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ $d_X(x_m, x_n) < \delta$ gilt. Wir wählen dieses N.

☐ Wenn X kompakt und f stetig ist, dann ist $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge.

*Richtig:*Wenn X kompakt ist, hat $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge. Also konvergiert die Cauchy-Folge $(x_n)_n$ gegen einen Grenzwert x. Da f stetig ist, konvergiert die Bildfolge $(f(x_n))_n$ gegen $f(x)$, ist also eine Cauchy-Folge in Y.

15.3. Integral

(a) Sei die Funktion f gegeben durch $f(x) = \int_{-\cos x}^{\cos x} (1 + 2\sin t) dt$. Welche der Aussagen gilt?

☐ $f'(x) = 4\sin(\cos x)$

Falsch.

☐ $f'(x) = 4\sin(\cos x) + 2\cos x$

Falsch.

- ☐ $f'(x) = -2\sin x$

  Richtig.

- ☐ $f'(x) = 2\sin(\cos x) + \cos x$

  Falsch.

Es gilt

$$\int_{-\cos x}^{\cos x} (1 + 2\sin t)dt = \int_{-\cos x}^{\cos x} dt + \int_{-\cos x}^{\cos x} 2\sin t dt\ .$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist $2\cos x$, während das zweite Integral verschwindet, da der Integrand eine ungerade Funktion ist und der Integrationsbereich ein Intervall mit Mittelpunkt 0 ist.

(b) Sei $f(x) = \int_\pi^x \cos(\cos t)\, dt$. $(f^{-1})'(0)$ ist gegeben durch

- ☐ -1
- ☐ $\frac{1}{\cos(1)}$
- ☐ $\cos(\cos(x))$
- ☐ $\frac{\pi}{2}$
- ☐ $\frac{\pi}{\cos(1)}$

Nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung (anwendbar, da $t \mapsto \cos(\cos t)$ stetig ist) ist f differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = \cos(\cos x)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|\cos x| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$ und daher ist $\cos(\cos x) > 0$. Also ist f strikt monoton wachsend und deshalb injektiv auf $\mathbb{R}$ (damit existiert die inverse Funktion und ist eindeutig).
Offensichtlich ist $f(\pi) = 0$ und daher ist $\pi = f^{-1}(0)$. Die Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion liefert deshalb:

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{\cos(\cos\pi)} = \frac{1}{\cos(-1)} = \frac{1}{\cos 1}$$

(c) Die Ableitung nach x von $g(x) = \int_{x^2}^1 \sin^2(t)\cos^2(t)dt$ ist

- ☐ $g'(x) = \int_{2x}^0 \sin^2(t)\cos^2(t)dt.$
- ☐ $g'(x) = -\sin^2(x^2)\cos^2(x^2).$
- ☐ $g'(x) = -2x\sin^2(x^2)\cos^2(x^2).$

Sei $F(t)$ eine Stammfunktion von $\sin^2(t)\cos^2(t)$, d.h. $F'(t) = \sin^2(t)\cos^2(t)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $g(x) = \int_{x^2}^1 \sin^2(t)\cos^2(t)dt = F(1) - F(x^2)$. Mit der Kettenregel folgt $g'(x) = -F'(x^2)2x = -2x\sin^2(x^2)\cos^2(x^2)$.

(d) Das uneigentliche Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx$

- ☐ konvergiert und hat den Wert e.
- ☐ konvergiert und hat den Wert $\ln(\ln(2))$.
- ☐ konvergiert, aber der Wert lässt sich nicht bestimmen.
- ☐ divergiert.
- ☐ Weiss nicht.

Aus der Vorlesung wissen wir:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c\,.$$

Wir benutzen dieses Resultat mit $f(x) = \ln(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c\\ &= \ln|\ln(x)| + c\,.\end{aligned}$$

Da mit $b \to \infty$ auch $\ln|\ln(x)| + c$ gegen ∞ strebt, existiert das uneigentliche Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx$ folglich nicht.

(e) Welche der folgenden Funktionen sind für $x > 0$ monoton wachsend?

- ☐ $x \mapsto \int_0^x t\,dt$

  Richtig.
- ☐ $x \mapsto \int_0^x t^2\,dt$

  Richtig.
- ☐ $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$

  Falsch.
- ☐ $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t\,dt$

  Richtig.
- ☐ Weiss nicht.

  Falsch.

Nach dem Hauptsatz ist die Ableitung der Funktionen jeweils die Integrandenfunktion. Diese sind bis auf $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$ alle ≥ 0. Ist die Ableitung einer Funktion nicht negativ, ist die Funktion monoton wachsend. Eine geometrische Begründung: Ausser bei $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$ alle ≥ 0 wächst die Fläche unter dem Funktionsgraphen.

(f) Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren?

- ☐ $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{1+x^2}dx$.

  Richtig: dieses Integral konvergiert nach dem Majorantenkriterium, weil $|\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{1+x^2}dx| \leq \int_0^\infty |\frac{\sin(x)}{1+x^2}|dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{R\to\infty}[\arctan(R)] - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$.

- ☐ $\int_1^\infty \frac{1}{x+x^2}dx$.

  Richtig: dieses Integral konvergiert nach dem Majorantenkriterium. Da $0 \leq \frac{1}{x+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ für $x > 0$ folgt, dass $\int_1^\infty \frac{1}{x+x^2}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1 - \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{R}\right] = 1$.

- ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2(x)}dx$.

  Falsch: dieses Integral konvergiert nicht, weil $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\tan^2(x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{u^2}du = -1 + \lim_{R\to 0, R>0}\left[\frac{1}{R}\right] = +\infty$.

(g) Für zwei ganze Zahlen $p, q \geq 0$ definieren wir

$$I(p,q) := \int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,dx\,.$$

$I(p,q)$ ist gegeben durch

Hinweis: Bestimmen Sie mit Hilfe einer partiellen Integration eine Rekursionsrelation zwischen den Grössen $I(p+1,q)$ und $I(p,q+1)$ und berechnen Sie $I(p,0)$.

- ☐ $\frac{p!}{(p+q+1)!}$
- ☐ $\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$
- ☐ $\frac{p!\,q!}{(p+q)!}$
- ☐ $\frac{1}{p+q+1}$
- ☐ $\frac{pq}{p+q+1}$

Mit einer partiellen Integration erhalten wir

$$I(p+1,q) = \int_0^1 x^{p+1}\,(1-x)^q\,dx$$

$$= -x^{p+1}\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{p+1}{q+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}\,dx = \frac{p+1}{q+1}\,I(p,q+1)$$

Es folgt

$$I\left(p,q+1\right) = \frac{q+1}{p+1} I\left(p+1,q\right) \qquad (1)$$

Weiter gilt

$$I(p,0) = \int_0^1 x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{p+1} \qquad (2)$$

Somit folgt

$$I(p,q) \overset{(1)}{=} \tfrac{q}{p+1}\,I(p+1,q-1) \overset{(1)}{=} \tfrac{q}{p+1}\cdot\tfrac{q-1}{p+2}\,I(p+2,q-2) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)\cdots(p+q)}\,I(p+q,0) \overset{(2)}{=} \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)\cdots(p+q+1)}$$

$$= \frac{q!}{(p+1)\cdots(p+q+1)} = \underbrace{\frac{p!}{1\cdot 2\cdots(p-1)p}}_{=1}\cdot\frac{q!}{(p+1)\cdots(p+q+1)} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

(h) Welche der uneigentlichen Integrale konvergieren?

☐ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$

Richtig: Es gilt $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ für $x \geq 1$ und damit folgt die Konvergenz des uneigentlichen Integrals aus derjenigen von $\int_1^\infty e^{-x}dx$.

☐ $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$

Richtig: Wir kürzen $\int_0^x \cos(x^2)dx = F(x)$ ab. Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to \infty$ und $x_n^2 > \pi/2$. Dann existieren eindeutige $k_n \in \mathbb{N}$ mit $\pi(k_n - 1/2) < x_n^2 \leq \pi(k_n + 1/2)$. Es folgt

$$F((\pi(k_n - 1/2))^{1/2}) \leq F(x_n) \leq F((\pi(k_n + 1/2))^{1/2})$$

oder

$$F((\pi(k_n - 1/2))^{1/2}) \geq F(x_n) \geq F((\pi(k_n + 1/2)^{1/2})$$

abhängig davon, ob k_n gerade oder ungerade ist. Da nun die Folge $F((\pi(n+1/2))^{1/2})$ nach dem Leibnizkriterium konvergiert, folgt die Konvergenz der Folge $F(x_n)$.

☐ $\int_0^\infty |\cos(x^2)|dx$

Falsch: Wir schreiben $\int_0^x |\cos(x^2)|dx = F(x)$. Für die Folge $x_n = (\pi(n+1/2))^{1/2} \to \infty$ gilt

$$F(x_{n+1}) - F(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |\cos(x^2)|dx \geq (x_{n+1} - x_n)/2 \geq \frac{\pi^{1/2}}{4(n+1/2)^{1/2}} .$$

Für die erste Ungleichung genügt es, festzustellen, dass $\cos(x^2)$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen konvex oder konkav ist und den Wert ± 1 erreicht. Wir haben gezeigt, dass die Folge $F(x_n)$ divergiert.

☐ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

Richtig: Der Beweis ist genau wie in der 2. Teilaufgabe.

☐ $\int_0^\infty x\cos(x^4)dx$

Richtig: Es gilt $\int_0^u x\cos(x^4)dx = \frac{1}{2}\int_0^{u^2} \cos(t^2)dt$. Das bedeutet, dass es sich um dasselbe Integral wie in der zweiten Teilaufgabe handelt.

(i) Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ existiere. Welche der Aussagen gilt?

☐ Die Folge $(f(n))_n$ ist eine Nullfolge.

Falsch: Z.B. existiert $\int_1^\infty f(x)dx$ für f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n + 2^{-n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

aber $(f(n) = 1)_n$ ist keine Nullfolge.

☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, ist sie eine Nullfolge.

Falsch: Siehe erste Teilaufgabe.

☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Falsch: Siehe erste Teilaufgabe.

☐ Alles sind falsch.

Richtig.