

1.1. MC Fragen: Supremum und Infimum auf \mathbb{R} Wählen Sie die einzig richtige Antwort.

(a) Sei S eine nichtleere, nach unten beschränkte Menge $S \subset \mathbb{R}$ und sei $\beta \in \mathbb{R}$ ihr Infimum. Dann:

- existiert $x \in S$ so dass $x < \beta + \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$;
- die Menge $(\beta, \beta + 1) \cap S$ ist nicht leer;
- für jedes $\epsilon > 0$ existiert $x \in S$ so dass $\beta \leq x < \beta + \epsilon$.

(b) Sei S eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} und sei $a \in \mathbb{R}$ ihr Infimum. Dann:

- für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine untere Schranke b von S , so dass $a < b < a + \epsilon$;
- $S \setminus \{a\}$ besitzt ein Minimum;
- a ist das Supremum der unteren Schranken.

(c) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass A nach oben unbeschränkt ist?

- für jedes $q \in \mathbb{Q}$ gilt $\sqrt{q^2 + 1} \in A$;
- für jedes $a \in A$ gilt $a \geq 10^4$;
- für jedes $a \in A$ gilt $a \geq a^2$.

1.2. (schriftlich) Bestimmung von Supremum und Infimum Bestimmen Sie das Supremum (möglich $+\infty$) und das Infimum (möglich $-\infty$) der folgenden Mengen. Welche Mengen besitzen Maximum oder Minimum? Zeigen Sie.

$$M_1 = \left\{ 1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}, \quad M_2 = \left\{ \frac{|x|}{1 + |x|} : x \in \mathbb{R} \right\},$$
$$M_3 = \bigcup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right], \quad M_4 = \left\{ \frac{x+y}{z} : x, y > 0, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

1.3. Abrundungsfunktion Die *Abrundungsfunktion* (Eng. "Floor Function") $[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist definiert wie folgt: für jede reelle Zahl x , ist $[x]$ die grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Zum Beispiel:

$$[3] = 3, \quad \left[\frac{1}{2} \right] = 0, \quad [17.5] = 17, \quad [\pi] = 3.$$

Sei jetzt $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \left\{ [\alpha n] \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

von oben beschränkt ist. Können Sie ihr Supremum bestimmen?

1.4. Komplexe Zahlen - Wiederholung Für jede der folgenden komplexen Zahlen z , finden Sie

- ihre kartesische Form $A + iB$,
- ihren Betrag $|z|$,
- ihr Konjugiertes \bar{z} ,
- ihr Reziprokes $1/z$ (in kartesischer Form):

$$z_1 = -3,$$

$$z_2 = 2i,$$

$$z_3 = \frac{1+i}{1-i},$$

$$z_4 = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_5 = -1 + i,$$

$$z_6 = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

$$z_7 = \sin \alpha + i \cos \alpha,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Die kartesische Form darf nicht i in dem Nenner erhalten! Z.B. $1+i$ ist OK, $1/(1+i)$ nicht.