2.1. Supremum und Infimum V Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Wir definieren

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $A+B$ beschränkt ist und, dass $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$. Gilt auch $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$?

2.2. MC Fragen: Folgenkonvergenz Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Seien (a_n), (b_n) und (c_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $c_n = a_n + b_n$. Dann:

- ☐ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n;$$

- ☐ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n;$$

- ☐ falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein.
- ☐ falls (c_n) konvergiert, konvergiert wenigstens eine der Folgen (a_n) und (b_n);

(b) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann

- ☐ falls $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt, dann konvergiert (a_n);

- ☐ falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ konvergent;
- ☐ falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent;
- ☐ falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a \ \forall n \in \mathbb{N}$, und $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist (a_n) konvergent.

(c) Sei $a_n = \frac{1}{n^2+1}$. Dann gilt $|a_n| < 0.01$:

- ☐ sobald $n \geq 9$,
- ☐ sobald $n > 9$,
- ☐ sobald $n > 10$,

☐ nie, so lange $n \leq 10$.

2.3. Folgen Man untersuche folgende reelle Folgen jeweils auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \cos(\tfrac{\pi}{3}n), \qquad b_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n},$$

$$c_n = \sqrt{n(n+2)} - n, \qquad d_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2},$$

$$e_n = \frac{e_{n-1} + e_{n-2}}{2}, \quad e_1 = 0, \; e_2 = 1.$$

Hinweis. Finden Sie eine explizite Formel für die Differenzen $F_n := f_n - f_{n-1}$.

2.4. Fibonacci (schriftlich) Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(a) Beweisen Sie folgende explizite Formel durch vollständige Induktion.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

(b) Zeigen Sie, dass $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gegen die goldene Zahl $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert.

(c) Finden Sie eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ sodass folgende Aussage gilt.

$$\forall m \in \mathbb{N}, \; m \geq n: \quad \left|b_m - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| \leq \tfrac{1}{100}.$$

2.5. Folgen Sei A ein Algorithmus dessen Input eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist und dessen Arbeitzeit für Input n gleich $a_n \geq 0$ ist. Wir nehmen an, dass

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass

$$a_n \leq Cn \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$