3.1. Cauchy-Kriterium Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen, sodass

$$|q_n - q_{n+1}| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Folgt daraus, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist? Finden Sie ein Gegenbeispiel oder beweisen Sie die Behauptung.

3.2. Induktive Folge (schriftlich)

(a) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$a_1 = \sqrt{2},$$
$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \geq 2.$$

(i) Beweisen Sie, dass $(a_n)_n$ von oben durch 2 beschränkt ist.

(ii) Berechnen Sie, falls existent, den Grenzwert von $(a_n)_n$.

(b) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$a_1 = 1,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tipp: Induktive Folge untersucht man mit Induktion.

3.3. MC Frage: Konvergenz und absolute Konvergenz Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- ☐ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergiert absolut falls beide Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergent sind.

- ☐ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ existiert, falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

absolut konvergent sind.

- ☐ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ existiert, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert.

3.4. MC-Fragen: Reihen und Cauchy-Folgen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern, d.h. $a_n \geq 0$ für jedes n. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass die Reihe divergiert?

☐ $a_n \geq 1/n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;

☐ $a_n > 2^{-n}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;

☐ es existiert $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \geq 1/\sqrt{n}$ für jedes $n \geq N_0$.

(b) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann

☐ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$;

☐ konvergiert $(x_n)_n$ gegen 0;

☐ ist x_n beschränkt.

3.5. Annäherung Sei $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass

$$a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

existiert. Sei

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Beweisen Sie, dass

$$|a - s_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$