5.1. MC Fragen: Stetigkeit einer Funktion Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) \neq 1$, so dass f in $x_0 = 0$ stetig ist. Dann

- ☐ existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass falls $0 < |x| < \delta$, gilt $|f(x) - 1| > \epsilon$;
- ☐ für jede Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1$.
- ☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann

- ☐ $\frac{f(x)}{x}$ in $x_0 = 2$ stetig ist $\Longrightarrow$ f ist stetig in $x_0 = 2$;
- ☐ Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\overline{n} \in \mathbb{N}$, so dass $|f(2 - 1/n) - f(2)| < \epsilon$ für jedes $n \geq \overline{n}$ $\Longrightarrow$ f ist stetig in $x_0 = 2$;
- ☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

(c) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $I \subset \mathbb{R}$. Dann

- ☐ I abgeschlossen $\Longrightarrow$ f beschränkt;
- ☐ I beschränkt $\Longrightarrow$ f beschränkt;
- ☐ Alle obigen Aussagen sind falsch.

5.2. (schriftlich) Definition von Stetigkeit Seien zwei Intervalle durch

$$I_1 = [a, b], \quad I_2 = [b, c]$$

gegeben mit $a < b < c$ und seien

$$f_1 : I_1 \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f_2 : I_2 \to \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [a, c] \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in [a, b[, \\ f_2(x) & x \in [b, c] \end{cases}$$

genau dann stetig ist, wenn $f_1(b) = f_2(b)$