7.1. Trigonometrische Funktion

(a) Zeigen Sie,

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

(b) Zeigen Sie,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad \forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

7.2. MC Fragen: Grenzwert einer Funktion Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1$. Dann

- ☐ existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass falls $0 < |x| < \delta$, gilt $|f(x) - 1| > \epsilon$;
- ☐ existieren $\epsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, so dass $|f(x_n) - 1| > \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- ☐ für jede Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass $\lim_{x\to 2} f(x) = \pi$?

- ☐ $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$;
- ☐ Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\overline{n} \in \mathbb{N}$, so dass $|f(2 - 1/n) - \pi| < \epsilon$ für jedes $n \geq \overline{n}$;
- ☐ $\lim_{n\to\infty} f(2 - 1/n) = \pi$.

7.3. Wichtige Grenzwerte Berechnen Sie mithilfe der Potenzreihendarstellung von exp, sin und cos folgende Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, **(d)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Bemerkung: Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

7.4. Definition von Stetigkeit Bestimme die Konstanten α und β so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta & \text{falls } x \leq -1, \\ (\alpha + \beta)x & \text{falls } -1 < x < 1, \\ x^2 + \alpha x - \beta & \text{falls } x \geq 1, \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ wird und skizziere ihren Graph.

7.5. Zwischenwertsatz

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(b) Es sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $x \in [0, 1]$ derart, dass $f(x) = x$ gilt.

(c) Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$. Zeigen sie dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$ existiert, so dass $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

7.6. Stetigkeit (schriftlich) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Zeigen Sie, mit dem Folgenkriterium, dass folgende Aussagen equivalent sind:

1. f ist in x_0 differenzierbar;
2. Es gibt eine Funkiton $\varphi : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ die stetig in x_0 ist und so dass:

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \quad x \in D$$