9.1. Reihen in $\mathbb{R}$ mit reellem Parameter Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent? Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind sie absolut konvergent? Benutzen Sie die Kriterien aus der Vorlesung.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+n^2x^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+|x|^n}$, **(d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^x}{n^n}$.

9.2. Reihen reellen Zahlen Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$, **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

Bestimmen Sie, falls existent, die Werte von (b) und (d).

9.3. MC Frage: Konvergenz und absolute Konvergenz Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☐ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergiert absolut falls beide Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

absolut konvergent sind.

☐ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ existiert, falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

absolut konvergent sind.

☐ $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ existiert, falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert.

9.4. MC Fragen: Konvergenz gegen $\pm\infty$ Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass

$$f(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{und} \quad g(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty. \tag{1}$$

(a) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0?$$

☐ ja

☐ nein

(b) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\infty?$$

☐ ja

☐ nein

(c) Ist es möglich, dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty? \tag{2}$$

☐ ja

☐ nein

9.5. Folgen von Funktionen Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert folgender Folgen von Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$. Bestimmen Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) = (1 + x/n)^2$

(b) $f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{falls } 0 \leq x < 1/(2n), \\ 2 - 2nx & \text{falls } 1/(2n) \leq x < 1/n, \\ 0 & \text{falls } 1/n \leq x \leq 1, \end{cases}$

Bemerkung: Eine Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls für jedes $x \in I$ die (Zahlen-)Folge $f_n(x)$ gegen den Wert $f(x)$ konvergiert, d.h. $|f(x) - f_n(x)| \to 0$ für jedes $x \in I$.
Eine Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmässig gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|f(x) - f_n(x)|\right) = 0.$$

9.6. Eine Funktionenreihe Die Funktion $\langle\cdot\rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert: $\langle x\rangle$ ist der Abstand von x zu der nächsten ganzen Zahl, nämlich, mit der Abrundungsfunktion

$$\langle x\rangle = \begin{cases} x - [x] & \text{falls } x - [x] \le \frac{1}{2}, \\ 1 - (x - [x]) & \text{falls } x - [x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man definiere die Funktion f durch

$$f(x) = \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} + \frac{\langle 100x\rangle}{100} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Offensichtlich haben wir punktweise Konvergenz

$$f_i \xrightarrow{i\to\infty} f,$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \langle x\rangle \\ f_2(x) &= \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} \\ f_3(x) &= \langle x\rangle + \frac{\langle 10x\rangle}{10} + \frac{\langle 100x\rangle}{100} \\ &\vdots \\ f_i(x) &= \sum_{k=0}^{i-1}\frac{\langle 10^k x\rangle}{10^k}. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie Graph(f_i) für $i = 1, 2, 3$ über das Interval $[0, 1]$. Sieht es so aus als konvergiere die Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f?

(b) Zeigen Sie, dass die gegebene Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist.

(c) Betrachten Sie jetzt die Folge $f_i(x) = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k}$. Konvergiert f_i nach f gleichmässig?

(d) Ist f stetig?

9.7. Mittelwertsatz

Sei $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]0,\pi[$ mit $f(0) \geq 1$ und $f'(x) \geq -1$ für alle $x \in\,]0,\pi[$. Folgern Sie $f(x) \geq 1 - x$ für alle $x \in [0,\pi]$ aus dem Mittelwertsatz. Folgt auch, dass f monoton ist? Beweisen oder widerlegen Sie diese Behauptung.