10.1. MC Fragen

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- ☐ $f^{(i)}(0) = 0$ für i ungerade.
- ☐ $f^{(i)}(0) = 0$ für i gerade.
- ☐ $f^{(i)}(0) \neq 0$ für i ungerade.
- ☐ $f^{(i)}(0) \neq 0$ für i gerade.

10.2. Eine Annäherung Sei $f : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arctan(x)$ die Funktion, so dass

$$\tan(f(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f glatt ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$|f^{(3)}(x)| \leq 2 \quad \forall\, |x| \leq 10.$$

(c) Bestimmen Sie eine Annäherung $c \in \mathbb{R}$ zu $f(\frac{1}{2})$, so dass $|c - f(\frac{1}{2})| < \frac{1}{10}$.

Hinweise: Benutzen Sie eine Taylorannäherung(Korollar 4.44).

10.3. Eine glatte Funktion Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C^\infty(]0, \infty[)$ ist und, dass $f^{(m)}(x) = P_m(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ gilt für $x > 0$. Dabei sind die P_m ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) Polynome.

(b) Bestimmen Sie $P_1, \ldots, P_4$.

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{x \downarrow 0} f^{(m)}(x) = 0$$

für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(d) Folgern Sie, dass f glatt ist mit $f^{(m)}(0) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

10.4. Riemann Integral (schriftlich)

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational oder } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q}, p \text{ und } q \text{ natürliche Zahlen, Teilerfremd} \end{cases}$$

Zeige, f is integrierbar und $\int_0^1 f(x)dx = 0$.