11.1. MC Fragen Wählen Sie die richtigen Antworten aus.

(a) Der Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} |t|\, dt$ beträgt:

- ☐ 0.
- ☐ 1.
- ☐ 2.
- ☐ 4.
- ☐ Keine der obigen Antworten ist richtig.

(b) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion f sind richtig?

- ☐ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.
- ☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.
- ☐ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.
- ☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.
- ☐ Keine.

11.2. Integrierbarkeit (schriftlich) Seien $a < b < c$ und $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeige: f ist genau dann auf $[a, c]$ integrierbar falls die Einschränkungen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind. In diesem Fall gilt:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

11.3. Das riemannsche Integral (schriftlich) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

1. f ist stetig;
2. $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$;
3. $\exists x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > 0$;

Zeige

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \tag{1}$$

Zeige anhand von Beispielen, dass jede der Voraussetzungen $1, 2, 3$ notwendig ist um (1) zu schliessen.

11.4. Integrale der Trigonometrische Funktion (schriftlich) Berechne die Integrale für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$$

Benütze $0 < \sin x < 1$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ sowie Übung 2 um zu zeigen, dass:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x)dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+2}(x)dx$$

Schliessen daraus:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \dots \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$