12.1. MC Fragen: Integration Für $f \in C^0(\mathbb{R})$(die Menge der stetige Funktionen) und $g \in C^1(\mathbb{R})$(die Menge der 1-mal stetig differenzierbaren Funktionen) mit $-\infty < a < b < +\infty$ lautet die Substitutionsregel

☐

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt$$

☐

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt$$

☐

$$\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})x\ dx = \int_{\frac{a^2}{2}}^{\frac{b^2}{2}} f(t)\ dt$$

☐

$$\int_a^b f(\tfrac{x^2}{2})\ dx = \int_{a^2}^{b^2} tf(t)\ dt$$

12.2. Gewichteter Mittelwertsatz Seien $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen mit G stetig und $F > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $c \in [a, b]$ existiert, sodass

$$\int_a^b F(x)G(x)\,\mathrm{d}x = G(c)\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

(b) Bleibt (1) wahr, wenn F nicht notwendigerweise positiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

12.3. Cauchy Produkt der Reihen (schriftlich) Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}x^n$$

und

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ...$$

Anhand der Rekursionsformel(Definition 5.41, eingetippte Notiz) für die Bernoulli Zahlen. Zeige, dass das Cauchy Produkt der Reihen $f(x)$ und $\frac{e^x-1}{x}$ gleich 1 ist.

12.4. Euler Mclaurin Summationsformel (schriftlich) Durch sorgfältige Anwendung der Euler Mclaurin Summationsformel auf

$$f(x) = x^l, \quad l \geq 1, l \in \mathbb{N}$$

Zeige für alle $n \geq 1$:

$$1^l + 2^l + ... + n^l = \frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^{l} (-1)^j B_j \binom{l+1}{j} n^{l+1-j}$$