13.1. Berechnung von Integralen Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\int \sin^2 t\, \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t; \qquad \textbf{(a)} \qquad \int \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t} \quad (\tan(t/2) = u); \qquad \textbf{(b)}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \quad (t^2+1 = u); \qquad \textbf{(c)} \qquad \int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\,\mathrm{d}t \quad (t = \sin^2 u); \qquad \textbf{(d)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}. \qquad \textbf{(e)}$$

13.2. Partialbruchzerlegung und Integration rationaler Funktionen Zerlegen Sie in geeignete Partialbrüche und integrieren Sie folgende Funktionen:

$$\frac{t+2}{t^2(t^2+2)}; \qquad \textbf{(a)} \qquad \frac{t}{t^3+t^2-t-1}; \qquad \textbf{(b)}$$

$$\frac{t^4+1}{(t^2+1)^2}; \qquad \textbf{(c)} \qquad \frac{1}{t^6-1}. \qquad \textbf{(d)}$$

13.3. Uneigentliche Integrale Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie folgende Integrale (falls konvergent):

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x; \qquad \textbf{(a)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{x^2}\,\mathrm{d}x; \qquad \textbf{(b)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\log|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x; \qquad \textbf{(c)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x. \qquad \textbf{(d)}$$

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t; \qquad \textbf{(e)} \qquad \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{1-x^x}\,\mathrm{d}x; \qquad \textbf{(f)}$$

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t. \qquad \textbf{(g)}$$

13.4. Gammafunktion Die Gammafunktion ist für reelle $\alpha > 0$ definiert durch:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \qquad (1)$$

(a) Beweisen Sie, dass das uneigentliche Integral (1) für jedes $\alpha > 0$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie die Funktionalgleichung: $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$.

(c) Beweisen Sie dass für natürliche Zahlen gilt $\Gamma(n+1)=n!$. Was folgern Sie daraus?

(d) Berechnen Sie $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ mithilfe des wesentlichen Gausschen Integrals (das in Analysis II bewiesen werden wird):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}.$$

13.5. Minkowski Ungleichung

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b$ sind stetig. Zeigen Sie,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p \quad 1<p<\infty$$