14.1. Berechnung von Folgengrenzwerten Berechnen Sie den Grenzwert, *falls er existiert*, der folgenden Folgen:

$$a_n = \left(\frac{2-3n}{2n+1}\right)^3, \qquad b_n = \sqrt[n]{3^n + 7^n},$$
$$c_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}, \qquad d_n = 0.\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ mal}},$$
$$e_n = \frac{(-1)^{n-1} - 2}{(-1)^n - 2}, \qquad f_n = n + (-1)^n,$$
$$g_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}, \qquad h_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

14.2. Äquivalente Bedingungen von Konvergenz Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. für jedes $\epsilon > 0$, existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass
$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N;$$

2. für jedes $\epsilon > 0$, hat die Menge
$$M_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} : a_n \notin \ ]a-\epsilon, a+\epsilon[\ \}$$
endliche Kardinalität, d.h. die Anzahl der Elemente, die M_ϵ enthält, ist endlich.

14.3. Wachstumsraten Seien $x > 1$, $\alpha > 0$ fixiert. Wir betrachten, für $n \geq 1$, die wachsende Folgen:

$$n!, \quad x^n, \quad n^\alpha, \quad n^n.$$

Können Sie diese der Grösse nach sortieren, wenn n gross genug ist? Ergänzen Sie die folgende Ungleichungskette:

$$n^\alpha \leq \ldots\ldots \leq \ldots\ldots \leq \ldots\ldots \quad \forall n \geq N_0,$$

für geeignetes $N_0 \in \mathbb{N}$.

14.4. Gerade und ungerade Teilfolgen Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reelle Zahlen. Beweisen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es existieren $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$ und $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1};$$

(ii) $(a_n)_n$ ist konvergent.

14.5. Rekursiv Folgen

(a) Die Folge $(d_n)_{n\geq 1}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 1 \qquad d_{n+1} := \sqrt{2d_n + 3}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

(b) Die Folge $(d_n)_{n\geq 1}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 3 \qquad d_{n+1} := \sqrt{3d_n - 2}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

14.6. Folgengrenzwerte

(a) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{1/n} - 1 - 1/n}{1 - n\sin(\frac{1}{n})}$.

(b) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{n^2 + n}$.

(c) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n},\ n \geq 1,$$

konvergent ist. Bestimmen Sie den Grenzwert.

14.7. Konvergente Teilfolge Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $(a_n)_n$ ist konvergent;

(ii) jede Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent.

14.8. Reihen mit π Euler zeigte als Erster, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bestimmen Sie die Summen der folgenden Reihen, mithilfe dieses Ergebnisses:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

14.9. Reihen

(a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $a_n := \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2 + n}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(c) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2015}}.$$

(d) Untersuchen Sie die Folge

$$s_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2 - 2}{2^j (j+1)^2}$$

auf Konvergenz.

(e) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{n} + n + 1}.$$

(f) Untersuchen Sie die Folge $a_n = \sin(n) \cdot \frac{2n-1}{(n+1)^2}$ auf Konvergenz.

(g) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 1}.$$

(h) Bestimmen Sie die Menge **aller** $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+4} \cdot x^n$$

konvergiert.

14.10. Grenzwerte von Funktionen Berechnen Sie folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad \textbf{(a)} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}, \qquad \textbf{(b)}$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{3}{x-4}, \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{3}{x-4}, \qquad \textbf{(c)} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}. \qquad \textbf{(d)}$$

Bestimmen sie β und γ reelle Zahlen so dass:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2-7x+1} - (\beta x + \gamma)\right) = 0.$$

14.11. Grenzwerte und Variablenwechsel Berechnen Sie, falls sie existieren, folgende Grenzwerte.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{x}, \qquad \textbf{(a)} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\cos x)}{\log x}, \qquad \textbf{(b)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log x \log(1-x), \qquad \textbf{(c)} \qquad \lim_{x\to 1^+} \log x \log(\log x), \qquad \textbf{(d)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, \qquad \textbf{(e)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}, \quad a \neq 0, \qquad \textbf{(f)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x \sin(\mathrm{e}^{-x} \cos x), \qquad \textbf{(g)} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^{1/4}}. \qquad \textbf{(h)}$$

14.12. MC Fragen: Stetigkeit Wählen Sie die richtige Antworten.

(a) “Sei $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ eine stetige, monotone Funktion. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(0)$ und $f(3)$ an.” Diese Aussage ist

☐ wahr;

☐ falsch.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a) < f(b)$. Dann liegen alle Funktionswerte zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f in $[a, b]$ genau eine Nullstelle.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f in $]a, b[$ genau eine Nullstelle.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nur an den Punkten 0 und 1 verschwindet. Dann:

☐ ist f monoton in $]-\infty, 0]$;

☐ ist es möglich, dass f in $]1, +\infty[$ ihr Vorzeichen ändert;

☐ ist das Vorzeichen von f konstant in $]1, +\infty[$.

14.13. Stetigkeit 1 Existiert $r \in \mathbb{R}$, sodass die Funktionsvorschrift

$$f(x) = \begin{cases} 2x\, r^{-1}, & \text{falls } x \in [0, 2[, \\ \sqrt{2rx - x^2}, & \text{falls } x \in [2, 4] \end{cases}$$

eine stetige Funktion $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ definiert? Zeichnen Sie den Graphen von f.

14.14. Stetigkeit 2 Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{a\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x^2 + x - 2ax - a}{|x - a| + |x^2 - a^2|} \end{aligned}$$

Existieren $\lim_{x \to a^-} f(x)$ und $\lim_{x \to a^+} f(x)$? Berechnen Sie, falls sie existieren, die Grenzwerte.

14.15. Berechnung von Ableitungen Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen mithilfe der Ableitungsregeln:

$$x \mapsto \frac{3x^7 + x^5 - 2x^4 + x - 3}{x^4}, \qquad \textbf{(a)} \qquad x \mapsto \frac{x^2(x^2 + 10x + 25)}{(x + 5)(x + 7)}, \qquad \textbf{(b)}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 2}{e^{-x}} + \log(1 + \cos^2(x)), \qquad \textbf{(c)} \qquad x \mapsto \sqrt{\cos(\sin(x^2)) + 1}, \qquad \textbf{(d)}$$

$$x \mapsto 2^{\sin x}. \qquad \textbf{(e)}$$

14.16. Grenzwerte Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}, \quad \text{(a)} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x+1}, \quad \text{(b)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \log x, \quad \text{(c)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x}, \quad \text{(d)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(3+\sin x)}{x}, \quad \text{(e)} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{x}, \quad \text{(f)}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}. \quad \text{(g)}$$

14.17. Mittelwertsatz

(a) Finden Sie für jede der folgenden Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ alle die Punkte $\xi \in [a,b]$, die die Aussage des Satz von Lagrange (Satz 4.17) erfüllen:

$$f_1 : [2,5] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 3x^2 - 5x + 1,$$
$$f_2 : [1,3] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{x+3}{x-4},$$
$$f_3 : [-3,4] \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sqrt{25-x^2}.$$

Zeigen Sie folgende Ungleichungen:

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} \quad \text{für } x > 0, \quad \text{(b)}$$

$$1 - \frac{1}{x} \le \log(x) \le x - 1 \quad \text{für } x > 0. \quad \text{(c)}$$

14.18. Umkehrsatz und Satz von Rolle

(a) Zeigen Sie, dass $f : x \mapsto x + e^x$ bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist, und dass ihre Inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Berechnen Sie die Werte $(f^{-1})'(1)$ und $(f^{-1})''(1)$.

(b) Diskutieren Sie Existenz und Anzahl der Losungen folgender Gleichung:

$$(x-1)e^x - (x+1)e^{-x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

14.19. Taylorpolynom Berechnen Sie die Taylorapproximation bis auf 4 ordnung. Ordnung an der Stelle x_0 für die folgenden Funktionen und Punkte:

$\frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$, **(a)** $\cosh x$ und $\sinh x$, $x_0 = 0$ **(b)**

$\cos(\mathrm{e}^{x^2} - 1)$, $x_0 = 0$, **(c)** $\log(\cos x)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$. **(d)**

14.20. Annäherung mit Taylor Berechnen Sie, mithilfe der Taylor-Approximation:

(a) einen Näherungswert für $\log(1.1)$ exakt bis drei Nachkommastellen,

(b) einen Näherungswert für $\sqrt[3]{65}$ exakt bis fünf Nachkommastellen,

wobei das Ergebnis als rationale Zahl gegeben werden muss.

14.21. Eine wichtige Schranke Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann Integrabel. Zeigen Sie

(a) falls $|f|$ Riemann Integrabel ist, und $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq M(b - a).$$

14.22. Durch Integrale definierte Funktionen Berechnen Sie die Ableitung folgender durch Integrale definierten reellen Funktionen:

$$A(x) = \int_0^{x^7 + \mathrm{e}^x} \cos(\mathrm{e}^{2t} + 2t)\, \mathrm{d}t, \qquad B(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t.$$

14.23. Berechnung von Integralen Berechnen Sie folgende bestimmte oder unbestimmte Integrale:

$\int_1^4 \frac{2 - x^2 + x}{x}\, \mathrm{d}x$; **(a)** $\int_1^9 (\sqrt{x} - 1)\,(x + 1)\, \mathrm{d}x$; **(b)**

$\int \mathrm{e}^{\cos x} \sin x\, \mathrm{d}x$; **(c)** $\int_0^1 t^2 \cos(2t)\, \mathrm{d}t$; **(d)**

$\int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos^2 x}{2\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$; **(e)** $\int (x^3 + 5x + 1)^{1291}(3x^2 + 5)\, \mathrm{d}x$; **(f)**

$\int \mathrm{e}^{5x} \cdot \sin(x)\, \mathrm{d}x$; **(g)** $\int \frac{x}{\sqrt{1 + 5x^2}}\, \mathrm{d}x$. **(h)**