15.1. Folgen und Reihen

(a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

☐ Jede beschränkte Folge ist konvergent.

☐ Jede konvergente Folge ist beschränkt.

☐ Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

☐ Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\{1, 2, 3, \dots\}$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = a_{\sigma(n)}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Die Folge ist monoton wachsend.

☐ Die Folge ist beschränkt.

☐ Die Folge ist divergent.

☐ Die Folge besitzt keinen Limes in $\mathbb{R}$.

(c) Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Welche der folgenden Aussagen gelten?

☐ Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

☐ Wenn die Folge $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

☐ Jede beschränkte Folge hat unendlich viele konvergente Teilfolgen.

(d) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe mit $\forall k \in \mathbb{N} : \ a_k \leq 0$. Die Reihe konvergiert...

☐ ...genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach unten beschränkt ist.

☐ ...genau dann, wenn (a_k) eine monoton wachsende Nullfolge ist.

☐ ..., falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq n_0 : |a_k| < \varepsilon$.

(e) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{n}} \cdot z^n$ ist auf dem Rand ihres Konvergenzkreises.

☐ überall absolut konvergent.

☐ überall konvergent, aber nicht überall absolut konvergent.

☐ überall konvergent ausser in endlich vielen Punkten.

☐ nirgendwo konvergent.

(f) Es gilt, dass $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ nicht absolut konvergiert. Kann man daraus ableiten, dass $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nicht absolut konvergiert?

☐ Ja.

☐ Nein.

(g) Sei $0 \leqslant q < 1$. Was sagt das Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geqslant 1} n^{1000} q^n$ aus?

☐ "Die Reihe konvergiert."

☐ "Die Reihe divergiert."

☐ Nichts.

(h) Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren $b_n = a_{n+N_0}$, wobei $N_0 = 100$. Wählen Sie die richtigen Antworten.

☐ Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$, und die Grenzwerte müssen zusammenfallen.

☐ Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$, aber es ist nicht nötig, dass die Grenzwerte gleich sind.

☐ $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} b_n$ existiert.

(i) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation der natürlichen Zahlen und sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren die Folge $b_n = a_{f(n)}$.

☐ Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

☐ Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$ aber es muss nicht unbedingt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ sein.

15.2. Funktionen

(a) Welche der folgenden Aussagen gilt?

☐ Es existiert eine Surjektion $\{0, 3, 333\} \to \{0, 1\}$.

☐ Es existiert eine Surjektion $\{x \in \mathbb{R} | \ x^2 - 4x + 3 = 0\} \cup \{0, 1\} \to \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n^3 \leq 100\}$.

☐ Es existiert eine Injektion $\mathbb{N} \to \{x \in \mathbb{R} | \; 0 < x < 1\}$.

(b) Seien X, Y Mengen. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist surjektiv genau dann, wenn gilt

☐ Das Bild $f(A)$ einer nichtleeren Teilmenge A ist nicht leer.

☐ Die Bilder $f(A_1)$, $f(A_2)$ von zwei disjunkten Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq X$ sind wieder disjunkt.

☐ Für jede nichtleere Teilmenge B von Y ist $f^{-1}(B)$ nicht leer.

☐ Wenn $B_1, B_2 \subseteq Y$ zwei disjunkte Teilmengen von Y sind, dann sind $f^{-1}(B_1)$, $f^{-1}(B_2)$ wieder disjunkt.

(c) Sei I ein beliebiges (beschränktes oder unbeschränktes) Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit Bildmenge $f(I)$. Seien $a := \inf f(I)$ und $b := \sup f(I)$. Welche der Folgerungen ist immer richtig?

☐ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in I$ so dass $0 \leq f(x) - a \leq \varepsilon$ gilt.

☐ Für jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $a \leq y \leq b$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in I$ so dass $|f(x) - y| \leq \varepsilon$ gilt.

☐ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in I$ so dass $0 \leq f(x) - b \leq \varepsilon$ gilt.

☐ Keine der obigen, sofern f nicht stetig ist.

(d) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

☐ Wenn f und g injektiv sind so ist auch $g \circ f$ injektiv.

☐ Wenn zwei der Abbildungen $f, g, g \circ f$ bijektiv sind, dann ist auch die dritte bijektiv.

☐ Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch g injektiv.

☐ Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.

(e) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \frac{1-x}{x+3}$. Dann gilt:

☐ Die Funktion f ist auf $(-\infty, -3)$ streng monoton fallend.

☐ Die Funktion f ist auf $(-3, \infty)$ streng monoton fallend.

☐ Die Funktion f nimmt auf $(-\infty, -3)$ nur negative Werte an.

☐ Die Funktion f nimmt auf $(-3, \infty)$ nur positive Werte an.

☐ Keine Aussage ist korrekt.

(f) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Falls f differenzierbar ist, so ist $x \mapsto f(|x|)$ auch differenzierbar.

☐ Wahr

☐ Falsch

(g) Sei $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$,dann ist f im Nullpunkt

☐ differenzierbar und stetig.

☐ differenzierbar und nicht stetig.

☐ nicht differenzierbar und nicht stetig.

☐ nicht differenzierbar und stetig.

(h) Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^{1/2} + n^{-1})^2.$$

Welche der Aussagen gilt?

☐ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

☐ Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.

☐ Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0,M]} : [0, M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

(i) Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f \circ g$ differenzierbar ist. Ist dann mindestens eine der beiden Funktionen f, g notwendigerweise differenzierbar?

☐ Ja.

☐ Nein.

(j) Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$ für $x \in]0, \infty[$ ist ...

☐ $f'(x) = x^x$.

☐ $f'(x) = x^{x-1}$.

☐ $f'(x) = x^2$.

☐ $f'(x) = (1 + \log x)x^x$.

☐ $f'(x) = x + x \log x$.

☐ keiner der obigen Ausdrücke.

(k) Welche der folgenden Schlussfolgerungen über eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist FALSCH?

- ☐ Ist f monoton wachsend, so ist $f' \geq 0$.
- ☐ Ist $f' = 0$, so ist f konstant.
- ☐ Ist $f' > 0$ auf $]a, b[$, so ist f streng monoton wachsend.
- ☐ Ist f streng monoton fallend, so ist $f' < 0$ auf $]a, b[$.

(l) Was genau besagt der Zwischenwertsatz?

- ☐ Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.
- ☐ Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.
- ☐ Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle ξ.
- ☐ Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $]a, b[$ wenigstens eine Nullstelle ξ.

(m) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \ \vee \ x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \neq 0 \text{ und } \ p, q \text{ teilerfremd} \end{cases} .$$

Welche der Aussagen gilt?

- ☐ Sei $E = \sqrt{3}\mathbb{Q} = \{\sqrt{3}q | q \in \mathbb{Q}\}$. Dann gilt $\lim_{E \ni x \to 1} f(x) = 0$.
- ☐ Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.
- ☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- ☐ f ist an der Stelle $x = 1$ stetig.

(n) Seien f_1, f_2 stetige Funktionen und seien g_1, g_2 unstetige Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Dann gilt:

- ☐ $f_1 + f_2$ ist stetig.
- ☐ $f_1 + g_1$ ist stetig.
- ☐ $g_1 + g_2$ ist unstetig.
- ☐ $f_2 + g_2$ ist unstetig.

- ☐ $f_1 + f_2 + g_1 + g_2$ ist stetig.

(o) Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$, $(x_n)_n \subset X$ eine Cauchy-Folge und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Welche der Aussagen gilt?

- ☐ Wenn f stetig ist, dann ist $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge.
- ☐ Wenn f gleichmässig stetig ist, dann ist $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge.
- ☐ Wenn X kompakt und f stetig ist, dann ist $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge.

15.3. Integral

(a) Sei die Funktion f gegeben durch $f(x) = \int_{-\cos x}^{\cos x}(1 + 2\sin t)dt$. Welche der Aussagen gilt?

- ☐ $f'(x) = 4\sin(\cos x)$
- ☐ $f'(x) = 4\sin(\cos x) + 2\cos x$
- ☐ $f'(x) = -2\sin x$
- ☐ $f'(x) = 2\sin(\cos x) + \cos x$

(b) Sei $f(x) = \int_{\pi}^{x} \cos(\cos t)\, dt$. $(f^{-1})'(0)$ ist gegeben durch

- ☐ -1
- ☐ $\frac{1}{\cos(1)}$
- ☐ $\cos(\cos(x))$
- ☐ $\frac{\pi}{2}$
- ☐ $\frac{\pi}{\cos(1)}$

(c) Die Ableitung nach x von $g(x) = \int_{x^2}^{1} \sin^2(t)\cos^2(t)dt$ ist

- ☐ $g'(x) = \int_{2x}^{0} \sin^2(t)\cos^2(t)dt$.
- ☐ $g'(x) = -\sin^2(x^2)\cos^2(x^2)$.
- ☐ $g'(x) = -2x\sin^2(x^2)\cos^2(x^2)$.

(d) Das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}dx$

- ☐ konvergiert und hat den Wert e.
- ☐ konvergiert und hat den Wert $\ln(\ln(2))$.
- ☐ konvergiert, aber der Wert lässt sich nicht bestimmen.

☐ divergiert.

☐ Weiss nicht.

(e) Welche der folgenden Funktionen sind für $x > 0$ monoton wachsend?

☐ $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\,dt$

☐ $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^2\,dt$

☐ $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin t\,dt$

☐ $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin^2 t\,dt$

☐ Weiss nicht.

(f) Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren?

☐ $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{1+x^2} dx.$

☐ $\int_1^\infty \frac{1}{x+x^2} dx.$

☐ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2(x)} dx.$

(g) Für zwei ganze Zahlen $p, q \geq 0$ definieren wir

$$I(p,q) := \int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,dx\,.$$

$I(p,q)$ ist gegeben durch

Hinweis: Bestimmen Sie mit Hilfe einer partiellen Integration eine Rekursionsrelation zwischen den Grössen $I(p+1,q)$ und $I(p,q+1)$ und berechnen Sie $I(p,0)$.

☐ $\frac{p!}{(p+q+1)!}$

☐ $\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$

☐ $\frac{p!\,q!}{(p+q)!}$

☐ $\frac{1}{p+q+1}$

☐ $\frac{pq}{p+q+1}$

(h) Welche der uneigentlichen Integrale konvergieren?

☐ $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$

- ☐ $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$
- ☐ $\int_0^\infty |\cos(x^2)|dx$
- ☐ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$
- ☐ $\int_0^\infty x\cos(x^4)dx$

(i) Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ existiere. Welche der Aussagen gilt?

- ☐ Die Folge $(f(n))_n$ ist eine Nullfolge.
- ☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, ist sie eine Nullfolge.
- ☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.
- ☐ Alles sind falsch.