III. 4 Der Min-Max Satz

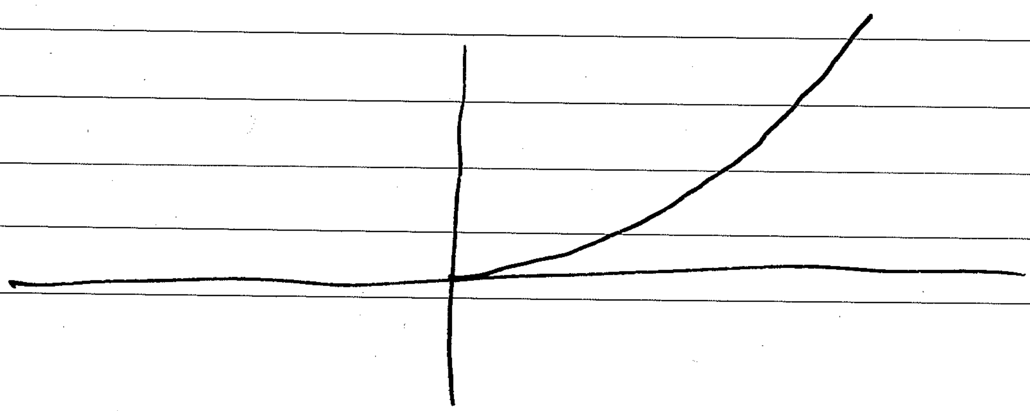
In diesem Abschnitt zeigen wir, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt ist und zudem ein Maximum und ein Minimum annimmt.

Wir betrachten zunächst folgende

Beispiele:

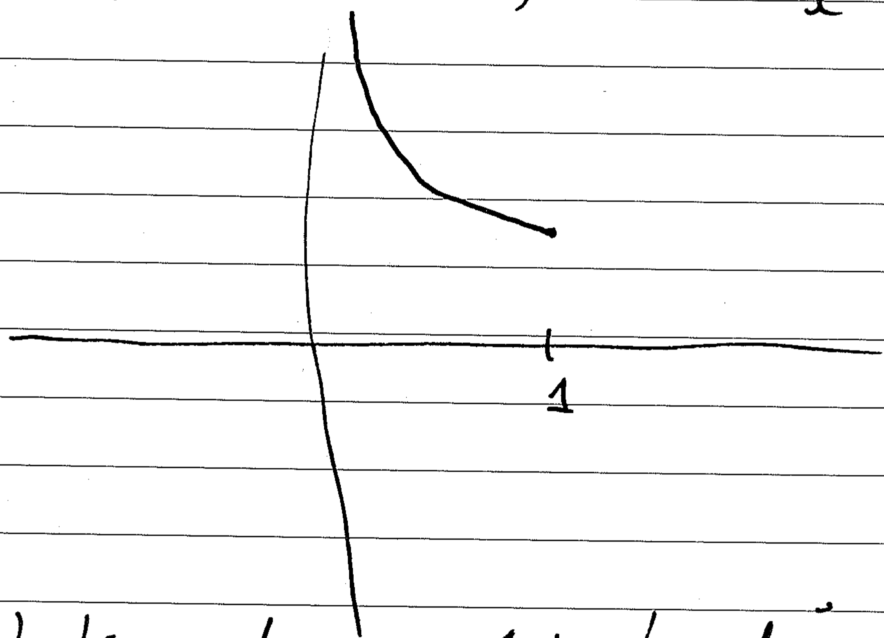
Beispiele III. 15

(1) $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$



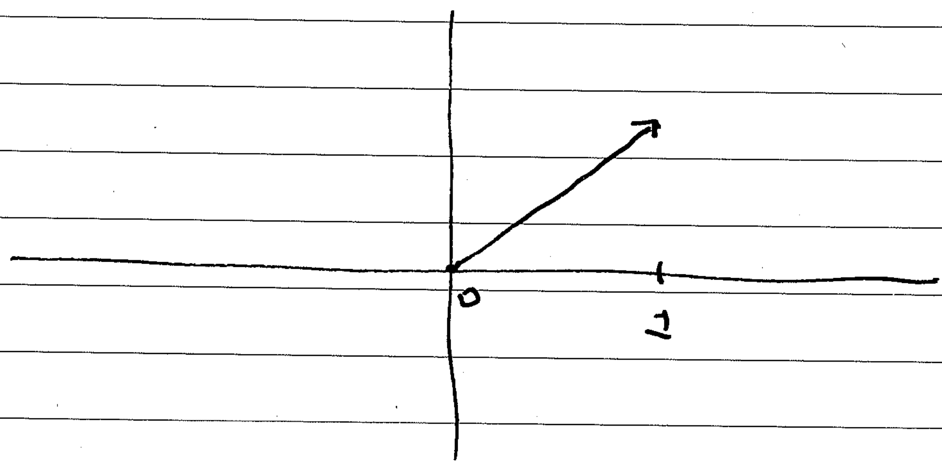
ist stetig aber nicht beschränkt.

(2) $f : \,]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x}$



ist stetig aber nicht beschränkt.

(3) $f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto x$



ist stetig, beschränkt, nimmt aber

kein Maximum an: es gibt kein $a \in [0,1[$ so dass $f(x) \leq f(a)$, $\forall x \in [0,1[$.

<u>Def. III.16</u> Ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist <u>kompakt</u> falls es der Form

$$I = [a,b], \quad a \leq b$$

ist.

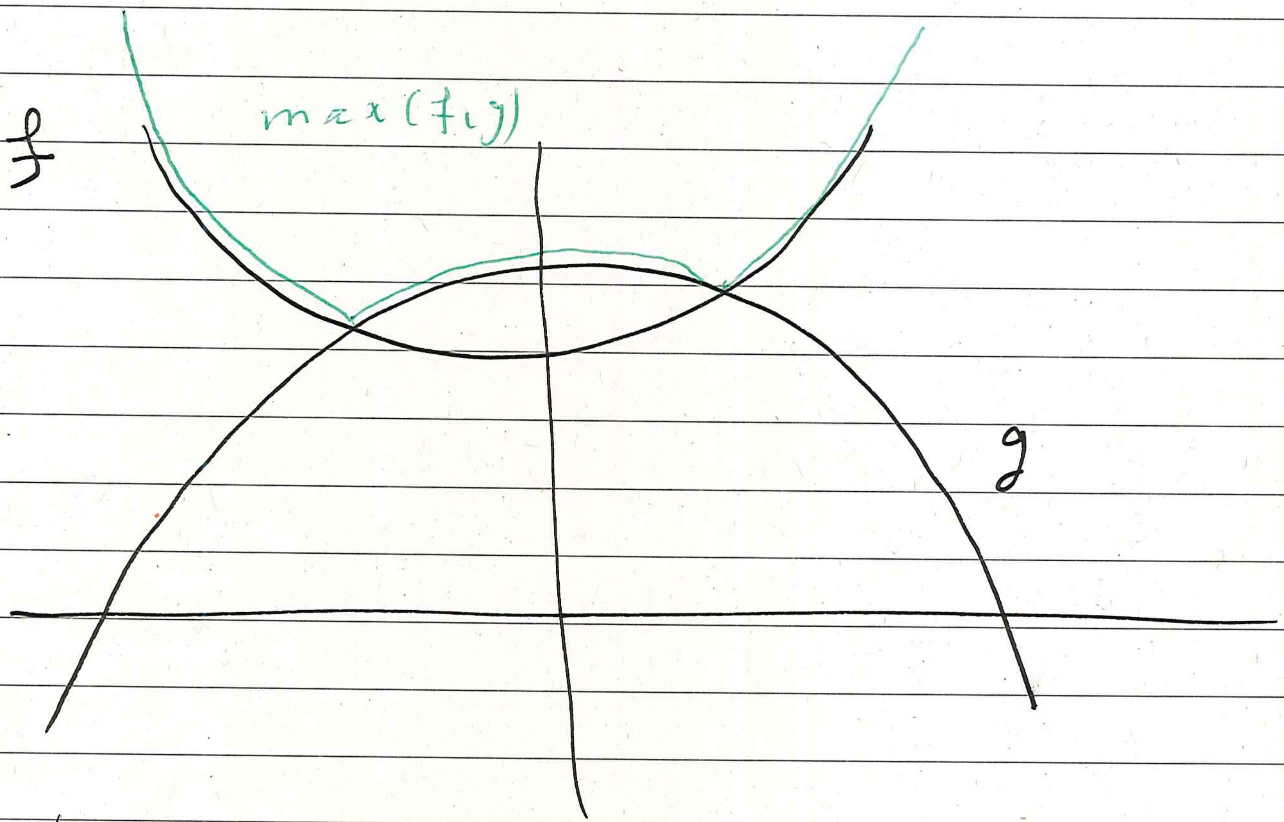
Als Vorbereitung zum Beweis führen wir noch folgende Begriffe an:

Sei allgemein, D eine Menge und $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen.

$$|f|(x) := |f(x)|, \quad \forall x \in D.$$

$$\max(f,g)(x) := \max(f(x), g(x)), \ \forall x \in D$$

$$\min(f,g)(x) := \min(f(x), g(x)), \ \forall x \in D.$$



<u>Lemma III.17</u> Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ und $f,g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Dann sind

$|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$

stetig in x_0.

Beweis:

(1) Zu $|f|$: sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so dass $\forall x \in D$ die Implikation:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt.

Dann folgt:

$$\big|\, |f|(x) - |f|(x_0) \,\big| = \big|\, |f(x)| - |f(x_0)| \,\big|$$

$$\leqslant |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

und somit ist $|f|$ in x_0 stetig.

(2) Zunächst bemerken wir: $\forall u, v \in \mathbb{R}$

$$\max(u,v) = \frac{u + v + |v - u|}{2}$$

$$\min(u,v) = \frac{u + v - |v - u|}{2}$$

Folglich:

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$$

$$\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

Aus Korollar III.8 (i) folgt, dass $f+g$ und $f-g$ in x_0 stetig sind; aus (1) folgt dann, dass $|f-g|$ in x_0 stetig ist; Wiederholte Anwendung von Korollar III.8 (i) impliziert dann dass $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ in x_0 stetig sind. $\boxed{\S}$

Eine wesentliche Eigenschaft kompakter Intervalle wollen wir hier hervorheben.

<u>Lemma III.18</u> Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Sei $a \leq b$. Falls $\{x_n : n \geq 1\} \subset [a, b]$ folgt $\lim_{n \to \infty} x_n \in [a, b]$.

<u>Beweis</u>: Aus $a \leq x_n \leq b \quad \forall n \geq 1$ folgt mit Satz II.8 (4):

$$a \leq \lim_{n \to \infty} x_n \leq b. \qquad \boxed{\xi}$$

Satz III. 19 Sei $f: I=[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I.$$

Insbesondere ist f beschränkt.

Beweis:

Wir beweisen die Existenz von v mit der Eigenschaft $f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in [a,b]$.

Sei

$$g(x) = \max\left(1, \frac{3}{2} - f(a) + f(x)\right).$$

Dann ist $g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(x) \geq 1$.

Dann folgt aus Korollar IV.8 (2), dass

$$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{g(x)}$$

stetig ist.

Nun gilt $0 < \frac{1}{g(x)}$, also existiert

$$s := \inf\left\{ \frac{1}{g(x)} : x \in [a,b] \right\}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ gibt es per Definition des Infimums ein $x_n \in [a,b]$ mit

$$s \leq \frac{1}{g(x_n)} < s + 1/n.$$

Nach Bolzano-Weierstrass gibt es eine Teilfolge $(x_{\ell(n)})_{n \geq 1}$ die konvergiert, denn $(x_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt.

Sei

$$v := \lim_{n\to\infty} x_{l(n)} .$$

Dann folgt aus Lemma III. 18, dass

$$v \in [a,b] .$$

Aus der Stetigkeit von $\frac{1}{g}$ und Satz III. 7

folgt:

$\cancel{g}$

$$s \leq \frac{1}{g(v)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{g(x_{l(n)})} \leq s + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{l(n)} = s+0$$

Insbesondere: $\quad \frac{1}{g(v)} \leq \frac{1}{g(x)} \quad \forall x \in [a,b]$

d.h.

$$g(x) \leq g(v) \quad \forall x \in [a,b].$$

Aus der Definition von g folgt:

$$\frac{3}{2} - f(a) + f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Da $g(a) = \max\left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$

folgt $g(b) = \max\left(1, \frac{3}{2} - f(a) + f(b)\right) \geq \frac{3}{2}$

Woraus $g(b) = \frac{3}{2} - f(a) + f(b)$ folgt.

Wir haben gezeigt: $\forall x \in [a,b]$

$$\frac{3}{2} - f(a) + f(x) \leq \frac{3}{2} - f(a) + f(b)$$

Woraus $f(x) \leq f(b)$ folgt.

Wir können dies jetzt auf $-f$ anwenden und erhalten die Existenz von $u \in [a,b]$ mit $-f(x) \leq -f(u)$

$\forall x \in [a, b]$, d.h. $f(u) \leq f(x)$

und der Satz ist bewiesen. $\boxed{\xi}$