

IV. 5. Der Satz über die Umkehrabbildung

Im Kontext der Umkehrabbildung stellt sich allgemein die Frage der Stetigkeit unter Verknüpfung.

Satz III. 20 Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ zwei Teilmengen, $f: D_1 \rightarrow D_2$, $g: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, sowie $x_0 \in D_1$. Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, ist $g \circ f: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Beweis: Wir wollen das Stetigkeitskriterium (Satz III. 7) anwenden.

- III - 37 -

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in D_1 mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0.$$

Da f stetig in x_0 folgt (Satz IV.7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$$

und da g in $f(x_0)$ stetig folgt (III.7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(a_n)) = g(f(x_0))$$

Woraus die Stetigkeit von $g \circ f$ in x_0 folgt. □

Korollar III.21 Falls in Satz III.20 f auf

D_1 und g auf D_2 stetig sind, ist

$g \circ f$ auf D_1 stetig.

Satz III.22 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton.

Dann ist $J := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

und $f^{-1}: J \rightarrow I$ ist stetig,

streng monoton.

Beweis:

Wir führen den Beweis im Fall

$$I = [a, b] \text{ wobei } a \leq b$$

und nehmen an, dass f streng monoton wachsend ist.

Aus $a \leq x \leq b$ folgt $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Somit ist $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass

es für jedes ~~$c \in [f(a), f(b)]$~~ ein

$c \in [f(a), f(b)]$ ein $\xi \in [a, b]$ gibt

mit $f(\xi) = c$. Folglich:

$$J = f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

und J ist ein Intervall. Insbesondere

ist $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ surjektiv;

f ist zudem injektiv da streng monoton

wachsend.

Sei $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ die

Umkehrabbildung.

Sei $y \in [f(a), f(b)]$ und $(y_n)_{n \geq 1}$

eine Folge in $[f(a), f(b)]$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

$$- \overline{N} - 40 -$$

Sei $x_n = f^{-1}(y_n)$, $x = f^{-1}(y)$.

Falls $(x_n)_{n \geq 1}$ nicht gegen x konvergiert
gibt es $\varepsilon > 0$ so dass

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}$$

unendlich ist. Es gibt also eine

Teilfolge $(x_{l(n)})_{n \geq 1}$ ($l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$)

mit

$$|x_{l(n)} - x| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq 1.$$

Nach Bolzano-Weierstrass (bemerke,

$[a, b]$ ist beschränkt) gibt es eine

Teilfolge $(x_{l(l'(n))})_{n \geq 1}$ die konvergiert.

Sei $z \in [a, b]$ deren Grenzwert:

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{l(l'(n))}.$$

-III-44-

Dann folgt aus $|x_{\ell(e'(n))} - x| \geq \varepsilon$

dass $|3 - x| \geq \varepsilon$ und

aus der Stetigkeit von f :

$$\begin{aligned} f(3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\ell(e'(n))}) = \lim_{x \rightarrow \infty} y = y \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Also ein Widerspruch mit der Injektivität
von f . □

Beispiel III.23 Sei $n \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} [0, \infty[&\rightarrow [0, \infty[\\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

streng monoton wachsend, stetig und
surjektiv. Nach dem Umkehrsatz

existiert eine streng monoton wachsende
stetige Umkehrabbildung

$$[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

genannt die n -te Wurzel.

III. 6. Die reelle Exponentialfunktion:

In Beispiel II. 53 haben wir die
exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
durch eine in ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergente
Potenzreihe definiert:

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Wir studieren jetzt eingehender diese

Funktion für $z \in \mathbb{R}$.

Satz II. 24 $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist
streng monoton wachsend, stetig und
surjektiv.

Wir zeigen einige Eigenschaften von
 $\exp$, die von unabhängigem Interesse
sind.

Mit $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \geq 1$
für $x \geq 0$, folgt mit

$$\exp(-x) \exp(x) = 1 \quad (\text{siehe II. 62})$$

dass

$$(\text{II. 25}) \quad \exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aus der Potenzreihenentwicklung von $\exp$ folgt ausserdem:

$$\exp(x) > 1 \quad \text{für } x > 0.$$

Falls jetzt $y < 3$ dann folgt

aus (II.62):

$$\exp(3) = \exp(y + (3-y)) = \exp(y) \exp(3-y)$$

und da $\exp(3-y) > 1$, folgt

$$(III.26) \quad \exp(3) > \exp(y).$$

Eine Ungleichung, die wir im Stetigkeitsbeweis benützen werden ist

$$(III.27) \quad \exp(x) \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dafür benützen wir (siehe Korollar II.64)

-III- 45 -

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Sei $x \in \mathbb{R}$ und N so dass

$$x/N > -1$$

Woraus natürlich

$$x/n > -1 \quad \forall n \geq N$$

folgt. Für alle $n \geq N$ folgt aus der

Bernoulli Ungleichung

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \left(\frac{x}{n}\right) = 1 + x$$

Woraus mit Satz 1.8 (4)

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

folgt.

Beweis von Satz 15.24

Aus (III. 25) folgt $\exp(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$
und aus (III. 26) folgt, dass $\exp$ streng
monoton wachsend ist.

Zur Stetigkeit:

Schritt 1: Stetigkeit in 0.

Sei $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, dann folgt aus
 $\exp(x) \geq 1+x$ für diese x , dass

$$\exp(-x) \leq \frac{1}{1+x}.$$

Wir können x und $-x$ vertauschen und
erhalten also $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:

$$1+x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

Woraus $x \leq \exp(x) - \exp(0) \leq \frac{x}{1-x} \leq 2x$

und somit:

$$|\exp(x) - \exp(0)| \leq 2|x| \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \varepsilon/2\right)$.

Dann folgt $\forall |x| < \delta$:

$$|\exp(x) - \exp(0)| \leq 2|x| < 2\delta \leq \varepsilon.$$

Damit ist die Stetigkeit in 0 bewiesen.

Schritt 2 : Stetigkeit überall.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann schreiben wir:

$$\begin{aligned} \exp(x) - \exp(x_0) &= \exp(x_0 + (x - x_0)) - \exp(x_0) \\ &= \exp(x_0) [\exp(x - x_0) - \exp(0)] \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2\exp(x_0)}\right)$.

$$- \text{III} - \text{us} -$$

Dann folgt: für alle $|x - x_0| < \delta$:

$$|\exp(x) - \exp(x_0)|$$

$$= \exp(x_0) |\exp(x - x_0) - \exp(0)|$$

$$\leq \exp(x_0) 2 |x - x_0| < \exp(x_0) \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2 \exp(x_0)}$$

$$= \varepsilon.$$

Surjektivität:

Wir bemerken, dass

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 = 2$$

und somit $e \geq 2$.

Daraus folgt $\exp(n) = e^n \geq 2^n \quad \forall n \geq 0$

und $\exp(-n) = \exp(n)^{-1} = e^{-n} \leq 2^{-n}$.

Also ist nach dem Zwischenwertsatz

$$[2^{-n}, 2^n] \subset \exp([-n, n])$$

und somit:

$$\bigcup_{n \geq 1} [2^{-n}, 2^n] \subset \exp \mathbb{R} \subset]0, +\infty[.$$

Daraus folgt $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$ und

der Satz ist bewiesen.

□

Die Umkehrabbildung der bijektiven Abbildung $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ nennen

wir den natürlichen Logarithmus und

bezeichnen sie mit $\ln$.

Korollar IV.28 Der natürliche Logarithmus

$$\ln:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

ist eine streng monoton wachsende, stetige bijektive Funktion. Des weiteren gilt

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$$

Beweis: Aus Satz III.24 folgt, dass

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$$

streng monoton wachsend, stetig und

bijektiv ist; unter Anwendung von

Satz III.22 mit $I = \mathbb{R}$ ~~und~~ $J =]0, \infty[$

~~folgt~~ und $f = \exp$ folgt, dass $f^{-1} = \ln$

$$\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

stetig, streng monoton und bijektiv ist.

Seien a, b in $]0, \infty[$: aus Anwendung

II.62 folgt:

$$\exp(\ln a + \ln b) = \exp(\ln a) \cdot \exp(\ln b).$$

Da $\exp$ die Umkehrfunktion von $\ln$

ist folgt:

$$\exp(\ln a) \exp(\ln b) = ab = \exp \ln(ab).$$

- III - 51 -

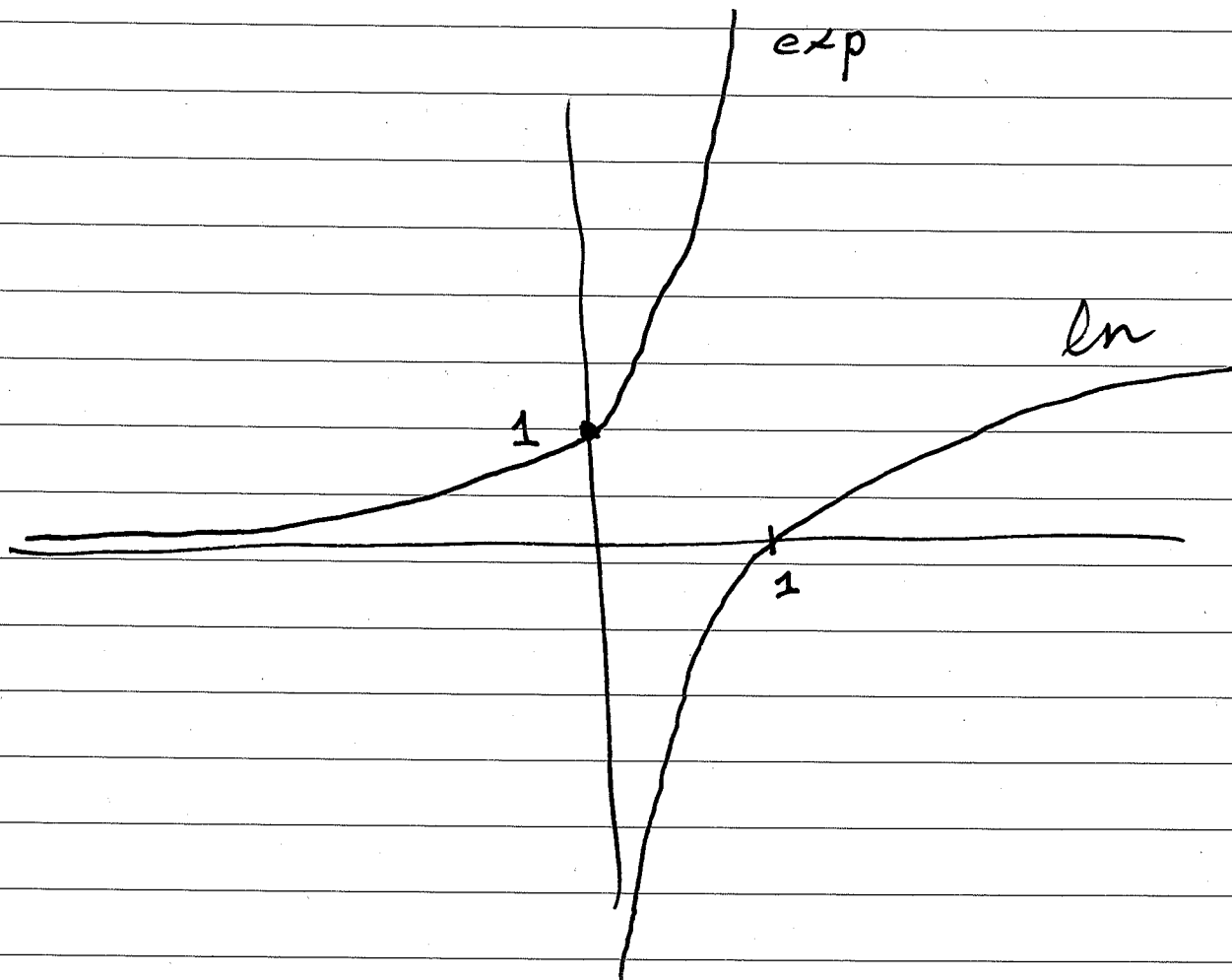
Daraus folgt:

$$\exp(\ln a + \ln b) = \exp(\ln ab).$$

Da $\exp$ injektiv ist, folgt:

$$\ln a + \ln b = \ln ab.$$

□



Wir können jetzt Logarithmus und Exponentialabbildung benutzen um allgemeine Potenzen zu definieren.

Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ beliebig definieren wir:

$$x^a := \exp(a \ln x).$$

Insbesondere: $x^0 = 1 \quad \forall x > 0.$

Korollar III. 29

(1) Für $a > 0$ ist

$$\begin{array}{ccc}]0, \infty[& \xrightarrow{\quad} &]0, \infty[\\ x & \mapsto & x^a \end{array}$$

eine stetige streng monoton steigende Bijektion.

- III - 53 -

(2) Für $a < 0$ ist

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto x^a \end{aligned}$$

eine ~~stetige~~ stetige streng monoton fallende
Bijektion.

$$(3) \ln(x^a) = a \ln(x) \quad \begin{aligned} &\forall a \in \mathbb{R}, \\ &\forall x > 0. \end{aligned}$$

$$(4) x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \begin{aligned} &\forall a, b \in \mathbb{R}, \\ &\forall x > 0 \end{aligned}$$

$$(5) (x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \begin{aligned} &\forall a, b \in \mathbb{R} \\ &\forall x > 0. \end{aligned}$$