

(2) Für $a < 0$ ist

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\xrightarrow{\quad}]0, +\infty[\\ x &\mapsto x^a \end{aligned}$$

eine ~~stetige~~ stetige streng monoton fallende
Bijektion.

$$(3) \ln(x^a) = a \ln(x) \quad \begin{aligned} &\forall a \in \mathbb{R}, \\ &\forall x > 0. \end{aligned}$$

$$(4) x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \begin{aligned} &\forall a, b \in \mathbb{R}, \\ &\forall x > 0 \end{aligned}$$

$$(5) (x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \begin{aligned} &\forall a, b \in \mathbb{R} \\ &\forall x > 0. \end{aligned}$$

Beweis:

(1) Für $a > 0$ ist mit $x \mapsto \ln x$

auch $x \mapsto a \ln x$ streng monoton steigend.

Da $x \mapsto \exp x$ streng monoton steigend

- III - 54 -

folgt $x \mapsto x^a = \exp(a \ln x)$ ist

streng monoton steigend.

Außerdem ist $x \mapsto x^a$ eine Verküpfung
stetiger Funktionen und deswegen nach
Satz IV.20 auch stetig.

(2) Analog wie (1). Es ist zu
bemerkⁿ, dass für $a < 0$

$x \mapsto a \ln x$ streng monoton fallend
ist.

$$(3) \ln(x^a) = \ln \exp(a \ln x) \\ = a \ln x.$$

$$(4) x^a \cdot x^b = \exp(a \ln x) \exp(b \ln x) \\ = \exp(a \ln x + b \ln x) \\ = \exp((a+b) \ln x) = x^{a+b}.$$

- III - 55 -

$$(5) (x^a)^b = \exp(b \ln(x^a))$$

$$\text{Aus (3): } \ln(x^a) = a \ln x$$

Woraus folgt:

$$(x^a)^b = \exp(b a \ln x) = x^{a \cdot b}$$

□

III. 7. Konvergenz von Funktionenfolgen.

Sei D eine Menge. Analog zur Definition einer Folge reeller Zahlen ist eine

(reellwertige) Funktionenfolge eine

Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^D$;

$$n \mapsto f(n)$$

wie im Fall der Folgen bezeichnen

wir $f(n)$ mit f_n und die Funktionen-

folge mit $(f_n)_{n \geq 0}$.

Für jedes $x \in D$ erhält man eine Folge $(f_n(x))_{n \geq 0}$ in $\mathbb{R}$.

Definition IV. 30 Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ falls für alle $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Beispiel IV. 31: Sei $D = [0, 1]$ und

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}.$$
$$x \mapsto x^n$$

Dann folgt aus Beispiel IV. 12:

$$\text{Für } 0 \leq x < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0.$$

Außerdem gilt $f_n(1) = 1^n = 1$.

Also konvergiert die Funktionenfolge

$(f_n)_{n \geq 0}$ punktweise gegen die

Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben

durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Bemerkung: die Funktionen ~~hier~~.

f_n sind alle stetig in $[0, 1]$, die

Funktion f ist nicht stetig in 1.

Um zu garantieren, dass der Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen stetig ist braucht es zusätzliche Voraussetzungen.

Def. III. 32 (Weierstrass 1841) Die Folge

$$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

konvergiert gleichmäßig in D gegen

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \text{ so dass:}$$

$$\forall n \geq N \text{ und } \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

In dieser Definition ist es wichtig, dass

N nur von ε und nicht von $x \in D$

abhängt. Deswegen kommt die Bedingung
" $\forall x \in D$ " nach der Bedingung " $\exists N \geq 1$ ".

Satz III.33 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und
 $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge
bestehen aus (in D) stetigen Funktionen
die (in D) gleichmäßig gegen eine
Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.
Dann ist f (in D) stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$.

Sei $N \geq 1$ so dass (gleichmäßige
Konvergenz):

$$|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D.$$

Da f_N in x_0 stetig ist gibt es $\delta > 0$
mit:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon.$$

Es folgt dann für $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_N(x_0) - f(x_0)|}_{< \varepsilon}$$

$$< 3\varepsilon. \quad \square$$

Def. IV. 34 Eine Funktionenfolge

$$f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$$

ist gleichmäßig konvergent falls

für alle $x \in D$ der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

existiert und die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$

III - CA -

gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aus dem Cauchy Kriterium (Satz II.19)
für Folgen folgt:

Korollar III.35 Die Funktionenfolge

$$f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$$

konvergiert genau dann gleichmäßig
in D falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ so dass:}$$

$$\forall n, m \geq N \text{ und } \forall x \in D:$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

"

Beweis: Übung. $\square$

Korollar III. 34 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Falls

$f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

stetig.

Beweis: Dies folgt aus Korollar III. 35 und Satz III. 33. $\square$

Sei nun $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen.

Def III. 17 Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig (in D) falls die durch

~ III - 63 -

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert.

Satz III.38 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und

$$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge stetiger Funktionen.

Wir nehmen an, dass

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$$

und, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

konvergiert. Dann konvergiert die

Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig in D und deren Grenzwert

~ III ~ 64 ~

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

ist eine in D stetige Funktion.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und $N \geq 1$ so

dass $\forall n \geq N$ und $k \geq 1$:

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} c_j < \varepsilon.$$

Dann folgt für

$$S_n(x) := \sum_{j=0}^n f_j(x) :$$

$$|S_{n+k}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} f_j(x) \right|$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} c_j < \varepsilon$$

$\forall x \in D.$

Also ist nach Korollar IV. 35 die

~ III ~ 65 ~

Funktionenfolge $(S_n)_{n \geq 0}$ in D

gleichmäßig konvergent und deshalb

ist nach Korollar III.36

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

in D stetig.

□

Wir wenden diesen Satz jetzt auf
das Studium von Potenzreihen an.

Sei (vergleiche mit Korollar II.56)

$(a_k)_{k \geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Def. III.39 Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

hat positiven Konvergenzradius falls

$$\sim \text{III} - \text{CC} -$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \text{ existiert.}$$

Der Konvergenzradius ist dann definiert

als:

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0. \end{cases}$$

~~Wiederholung~~

In Korollar II.56 hatten wir gezeigt,
dass für alle $|x| < \rho$, die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

absolut konvergiert. Sei also

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < \rho.$$

- III - 67 -

Satz III.40 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine

Potenzreihe mit positivem Konvergenz-
radius $\rho > 0$ und sei

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad |x| < \rho.$$

Dann gilt: $\forall 0 < r < \rho$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

gleichmäßig auf $[-r, r]$, insbesondere

ist $f: (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Sei $f_k(x) = c_k x^k$, $k \geq 0$.

Dann ist f_k auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Für $|x| \leq r$ gilt auch:

~ 11) - 68 -

$$|f_n(x)| = |c_n x^n| \leq |c_n| r^n.$$

Da nach Korollar II.56

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$$

konvergiert, folgt aus Satz II.38,

dass
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

auf $[-r, r]$ gleichmäßig konvergiert.

Inbesondere ist

$$f: [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig. Da dies für alle $r < \rho$

gilt, folgt, dass

$$f: (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig ist.}$$

QED

III.8. Trigonometrische Funktionen.

Die in I.3 benützten Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ sind nicht wirklich definiert worden, da wir den Begriff des Winkelmasses nie definiert hatten. Auch ist die "Zahl" π nicht streng definiert. Dies wollen wir jetzt nachholen.

Wir definieren die Sinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und die Cosinusfunktion für $z \in \mathbb{C}$

- III - 70 -

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Aus dem Quotientenkriterium (Satz II.52) folgt, analog zum Fall der Exponentialfunktion (Beispiel II.53), dass beide Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren. Derwegen ist in beiden Fällen deren Konvergenzradius $+\infty$ und es folgt aus Satz II.40

Satz III.41 : $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und
 $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

sind stetige Funktionen.

- III - 71 -

Weitere Eigenschaften der Sinus
und Cosinus Funktion ergeben sich
durch ihren Zusammenhang mit der
Exponentialfunktion.

Satz III. 42

$$(1) \exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$(2) \cos z = \cos(-z) \quad \text{und}$$

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$(3) \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$(4) \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w).$$

$$(5) \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Beweis:

$$(1) \exp(i3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i3)^k}{k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(i3)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(i3)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\}$$

nach Satz II. 35 (1):

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i3)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i3)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

folgt bemerken wir: $i^{2n} = (-1)^n$

und: $i^{2n+1} = i(-1)^n$

Woraus folgt:

$$= \cos(3) + i \sin(3).$$

(2) Folgen aus der Definition.

$$- \underline{III} - 73 -$$

$$(3) \exp(i3) = \cos(3) + i \sin(3)$$

und aus (2) folgt:

$$\exp(-i3) = \cos(3) - i \sin(3)$$

Woraus (3) ~~es~~ folgt (durch subtraktion resp. addition der beiden Identitäten).

(4) Aus

$$e^{i(z+w)} = e^{iz} e^{iw} \quad (\text{II. 62})$$

$$= (\cos(3) + i \sin(3)) (\cos(w) + i \sin(w))$$

$$= \{ \cos(3) \cos(w) - \sin(3) \sin(w) \}$$

$$+ i \{ \sin(3) \cos(w) + \cos(3) \sin(w) \}$$

und analog

$$e^{-i(z+w)} = e^{-iz} e^{-iw}$$

$$= (\cos(z) - i \sin(z)) (\cos(w) - i \sin(w))$$

$$= \{ \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w) \}$$

$$- i \{ \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w) \}$$

(resp. substr.)

Durch addition ^(resp. substr.) beider Identitäten und
benützung von

$$\cos(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2}$$

$$\sin(z+w) = \frac{e^{-i(z+w)} - e^{i(z+w)}}{2i}$$

erhalten wir die Additionsformeln.

(5) Setze $z = -w$ in ~~den~~ der

Additionsformel für $\cos(z+w)$.

[5]

Wir bemerken, dass sich aus den Additionsformeln die Winkelverdoppelungsformeln ergeben:

$$(III.43) \quad \sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$$

$$\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z).$$

III.9. Die Kreiszahl π .

In diesem Abschnitt studieren wir die Sinus und Cosinusfunktion als Funktionen der Variablen $x \in \mathbb{R}$. Aus der Definition von $\sin(x)$ folgt $\sin(0) = 0$.

Satz IV.44. Die Sinusfunktion hat auf $(0, +\infty)$ mindestens eine Nullstelle.

Sei $\pi := \inf \{ t > 0 : \sin t = 0 \}$.

Dann gilt (1) $\sin \pi = 0$, $\pi \in (2, 4)$.

(2) $\forall x \in (0, \pi)$, $\sin x > 0$

(3) $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.

Zunächst ein Paar Bemerkungen von allgemeinem Interesse.

Sei $x \geq 0$: die Reihe

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

ist alternierend.

Für $x \geq 0$ ist $\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)_{n \geq 0}$

- III - 77 -

genau dann monoton fallend, falls

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{d.h.} \quad x^2 \leq 2n(2n+1) \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{d.h.} \quad x \leq \sqrt{6}$$

Es folgt dann aus dem Satz II. 47

$$(III 45) \quad x \geq \sinh x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}.$$

Beweis von Satz II. 44 :

Sei wieder:

$$\sinh(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

Wir betrachten für $x \geq 0$ die

- III - 78 -

alternierende Reihe

$$\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \dots$$

Dann ist $\left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)_{n \geq 4}$ monoton

fallend falls

$$x^2 \leq 8 \cdot 9 = 72$$

d.h. $0 \leq x \leq \sqrt{72}$.

Nach Satz 11.47 folgt

$$\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \dots \leq \frac{x^9}{9!} \quad \forall x \in [0, \sqrt{72}]$$

Woraus

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \quad \forall x \in [0, \sqrt{72}]$$

Insbesondere ergibt eine (lange) Rechnung:

$$\sin(4) \leq -\frac{268}{405} < 0.$$

- III - 79 -

Aus III. 45 folgt

$$\sin x \geq x - \frac{x^2}{2!} \quad \forall x \in [0, 2]$$
$$= x \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

Insbesondere:

$$\sin x > 0 \quad \forall x \in]0, 2]$$

~~Aus~~ ^{Es} gilt: $\sin 2 > 0$ und $\sin 4 < 0$.

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es

also in $]2, 4[$ mindestens eine Nullstelle
für Sinusfunktion.

Aus der Definition von π und der
Stetigkeit von Sinus folgt

$$\sin(\pi) = 0$$

Aus obiger Diskussion folgt $\pi \in [2, 4]$.

Jetzt zeigen wir: $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]0, \pi[$.

Aus der Definition von π folgt, dass

$\sin$ auf $]0, \pi[$ keine Nullstelle besitzt.

Nun bemerken wir

$$0 < 1 < 2 \leq \pi$$

$$\text{und} \quad \sin(1) \geq 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6} > 0.$$

Falls es $y \in]0, \pi[$ gibt mit

$$\sin(y) < 0$$

dann würde aus $\sin(1) > 0$ und

dem Zwischenwertsatz die Existenz

von ξ zwischen 1 und y folgen mit

$$\sin(\xi) = 0$$

Insbesondere $0 < \xi < \pi$.

Ein Widerspruch zur Definition von π .

Nun zu (3):

Aus der Winkelverdopplungsformel folgt:

$$0 = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}.$$

Da $\frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$, ist $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$

insbesondere folgt:

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$\text{Aus } \left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

und $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ folgt

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

und somit:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i.$$

□