Korollar III.46

(1) $e^{i\pi} = -1$, $e^{2i\pi} = 1$

(2) $\sin(x + \pi/2) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$

(3) $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

(4) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

(5) Nullstellen von Sinus $= \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$

$\sin(x) < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$

(6) Nullstellen von Cosinus
$$= \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in \left] -\pi/2 + 2k\pi, -\pi/2 + (2k+1)\pi \right[$

$\cos(x) < 0 \quad \forall x \in \left] -\pi/2 + (2k+1)\pi, (2k+2)\pi \right[$.

<u>Beweis:</u>

(1) Aus $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ (Satz III.44 (3)) folgen

$$e^{i\pi} = i^2 = -1 \quad \text{und} \quad e^{2i\pi} = (-1)^2 = 1.$$

(2) Aus Satz III.42 (3) und Satz III.44.(3):

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i(x+\frac{\pi}{2})} - e^{-i(x+\frac{\pi}{2})}}{2i}$$

$$= \frac{e^{ix} e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{-ix} e^{-\frac{i\pi}{2}}}{2i}$$

$$= \frac{e^{ix} \cdot i - e^{-ix}(-i)}{2i}$$

$$= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x).$$

Für $\cos(x + \pi/2)$ verfährt man analog.

(3) und (4) folgen mit mehrfacher Anwendung von (2).

(5) Aus Satz III. 44 (2) folgt

$$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in]0, \pi[$$

und aus $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ folgt

$$\sin(x) < 0 \quad \forall x \in]\pi, 2\pi[.$$

Falls $x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$

folgt $x - 2k\pi \in \,]0, \pi[$ und somit

$\sin(x) = \sin(x - 2k\pi) > 0.$

Falls $x \in \,](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$

folgt $x - 2k\pi \in \,]\pi, 2\pi[$ und somit

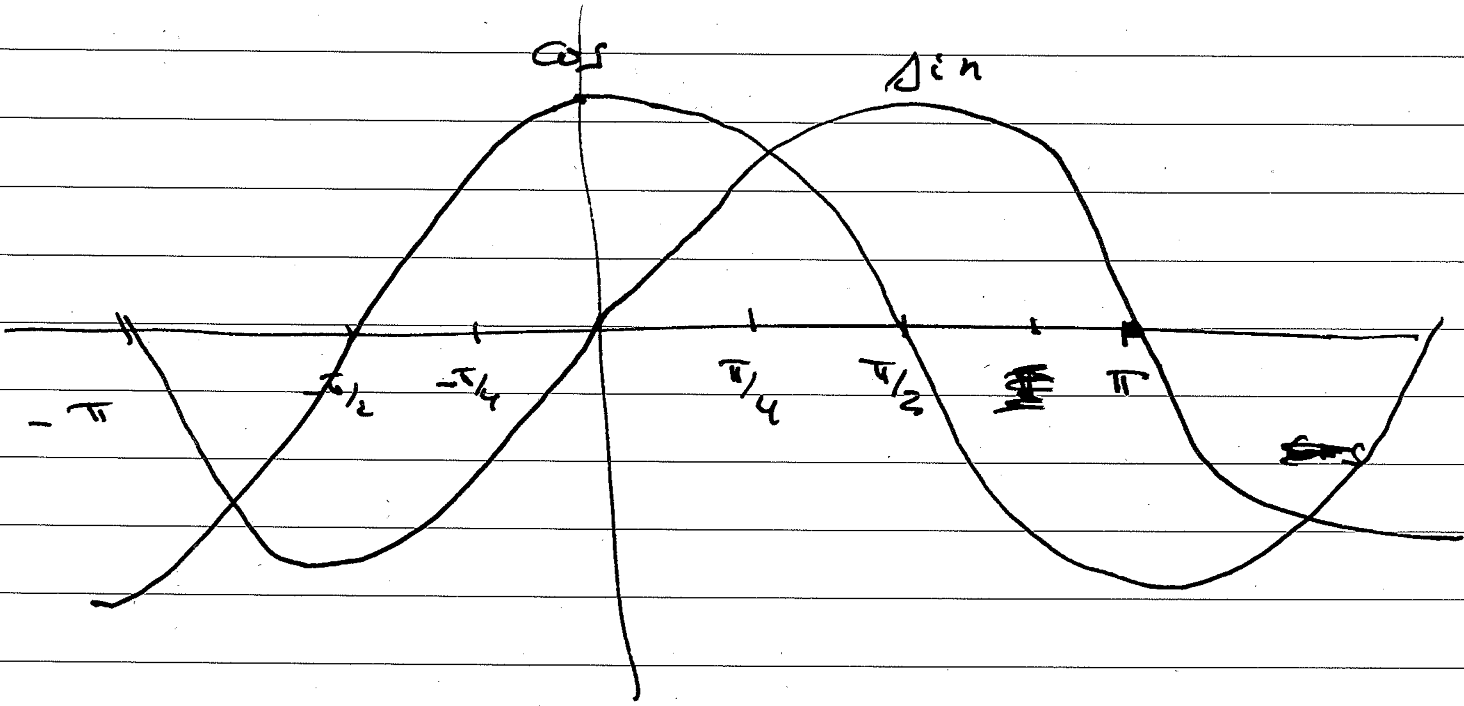
$\sin(x) = \sin(x - 2k\pi) < 0.$

(6) Folgt aus (5) und der Relation

~~Cos (x + π~~ $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ in (2).

$\square$

Mittels Differentialrechnung werden wir ein besseres Verstehen für das Bild der Graphen von Sinus und Cosinus entwickeln.



Für $z \notin \frac{\pi}{2} + \pi \cdot \mathbb{Z}$ definieren wir die Tangensfunktion:

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}.$$

und $z \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$ die Cotangensfunktion:

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

III.10. Grenzwerte von Funktionen.

Wir betrachten wieder Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}$$

auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und wollen Grenzwerte für den Fall definieren wenn $x \in D$ "gegen ein $x_0 \in \mathbb{R}$ strebt"; wir müssen dabei berücksichtigen, dass

$$x_0 \notin D$$

möglich ist. Wir werden also annehmen dass x_0 ein Häufungspunkt von D ist.

Def III.47: $x_0 \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt der Menge D falls $\forall \delta > 0$

$$\left(\left] x_0 - \delta, x_0 + \delta \right[\setminus \{x_0\} \right) \cap D \neq \emptyset.$$

Beispiel III. 48 Sei $D = \{0\} \cup]0,1[$

Dann ist die Menge D' der Häufungspunkte von D:

$$D' = [0,1].$$

Def. III. 48 Sei $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$, bezeichnet mit

$$\text{„}\lim_{x \to x_0} f(x) = A\text{“},$$

falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ so dass

$$\forall x \in D \cap \big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}\big), \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Bemerkungen III. 49

(1) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von D. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

genau dann wenn für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$

folgt $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = A$.

(2) Sei $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(3) Mittels (1) zeigt man leicht, dass falls $f, g : D \to \mathbb{R}$ und

$\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existieren so folgt

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

(4) $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $f \leq g$. Dann folgt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$ falls

beide Grenzwerte existieren.

(5) Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ und

$\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2(x)$ dann existiert

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ ist ist gleich $\lim_{x \to x_0} g_1(x)$.

Beispiel III. 50.

Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Dann gilt: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Aus III. 45 folgt $\forall x \in \,]0, \sqrt{6}]$:

$$1 - \frac{x^2}{3!} \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

und folglich $\forall x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}] \setminus \{0\}$

da x^2 und $\frac{\sin x}{x}$ gerade sind.

Die Aussage folgt dann aus Bemerkung III. 45 (5)

Satz III.51 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D, $f: D \to E$ eine Funktion. Wir nehmen an, dass

$$y_0 := \lim_{x \to x_0} f(x)$$

existiert und $y_0 \in E$. Falls $g: E \to \mathbb{R}$ stetig in y_0 folgt:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0).$$

Beweis: Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$. Dann folgt aus

Bemerkung III.49 (1):

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = y_0$$ und aus

der Stetigkeit von g:

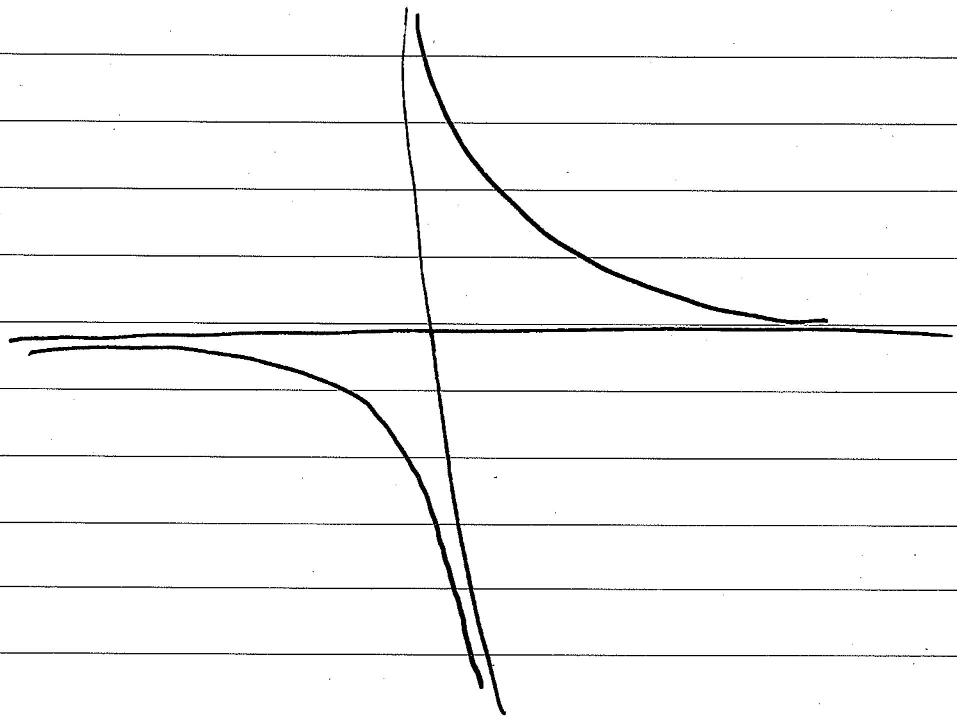
$$g(y_0) = \lim g(f(a_n)).$$ Der Satz

folgt dann mit Verwendung von Bemerkung III.42. (i). $\square$

Links und rechtsseitige Grenzwerte

Betrachten wir z. B.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$



dann wird für $x > 0$ x beliebig nahe an 0, $1/x$ beliebig positiv gross und für $x < 0$ x beliebig nahe an 0, $1/x$ beliebig negativ gross. In beiden Fällen hat $1/x$ ein einfaches Verhalten.

Im Fall $a \in \mathbb{R}$ $\quad f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$
$$x \mapsto x^a$$

ist f auf $]0,\infty[$ definiert. Falls $a > 0$ werden wir sehen, dass

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in]0,\infty[}} f(x) = 0.$$

~~In beiden Fällen~~

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$.

Wir nehmen an, x_0 ist Haufungspunkt von $D \cap]x_0, +\infty[$ d.h. ein rechtsseitiger Häufungspunkt.

Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion $f|_{D \cap [x_0, +\infty)}$ für $x \to x_0$ existiert wird er mit $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ bezeichnet und nennt sich rechtsseitiger Grenzwert von f bei x_0.

Wir erweitern diese Definition auf:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$: falls

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D \cap (x_0, x_0 + \delta), \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$

und analog:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \quad \text{falls:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in D \cap (x_0, x_0 + \delta), \ f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Linksseitige Häufungspunkte und Grenzwerte werden analog definiert.

Mit diesen Definitionen gilt:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Beispiel III.52 $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

Nun, $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$ ist strikt monoton. Sei: $e^{-n-1} < x < e^{-n}$

dann folgt $-(n+1) < \ln x < -n$

Woraus die Behauptung folgt.

<u>Beispiel III.53</u> Für $a>0$ ist

$$\lim_{x \to 0^+} x^a = 0.$$

Aus III.52 folgt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$, ein $\delta > 0$ gibt so dass:

$0 < x < \delta \Rightarrow \ln x < -n$, und

da $a > 0$, $a \ln x < -an$, und

da exp (streng) monoton wachsend,

$$x^a = \exp(a \ln x) < \exp(-an)$$

Nun wird mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig gross

$\exp(-an) = (\exp(-a))^n$ beliebig

klein da $\exp(-a) < 1$ woraus die

Behauptung folgt.