(3) Ist analog zu (2).

Das nächste Resultat zeigt wie man die Ableitung einer Verknüpfung von Funktionen berechnet.

Satz IV.10 Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt. Sei $f : D \to E$ eine in x_0 differenzierbare Funktion so dass $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspunkt von E ist, und sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine in y_0 differenzierbare Funktion. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

<u>Beweis</u>: Nach Satz IV. 4 seien

$\varphi : D \to \mathbb{R}$ und $\psi : E \to \mathbb{R}$ respektive

in x_0 und $y_0 = f(x_0)$ stetig, so dass

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \quad , x \in D$$

$$g(y) = g(y_0) + \psi(y)(y - y_0) \quad , y \in E.$$

Mit $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$ erhalten wir

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + \psi(f(x))(f(x) - f(x_0))$$

$$= g(f(x_0)) + \psi(f(x))\varphi(x)(x - x_0).$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, ist sie nach Korollar IV.5 stetig, somit ist $\psi \circ f$ in x_0 stetig (Satz III.20) und nach Korollar III. 8. (1), $x \longmapsto \psi(f(x))\varphi(x)$ stetig in x_0. Somit ist nach Satz IV. 4

$g \circ f$ differenzierbar in x_0 und

$$(g \circ f)'(x_0) = \varphi(f(x_0))\, p(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

$\boxed{\xi}$

<u>Korollar IV.14</u> Sei $f : D \to E$ eine bijektive Funktion, $x_0 \in D$ Häufungspunkt; wir nehmen an f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$; zudem nehmen wir an f^{-1} ist in y_0 stetig. Dann ist y_0 Häufungspunkt von E, f^{-1} ist in y_0 differenzierbar und:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

<u>Beweis:</u> Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in D mit $a_n \neq x_0$ $\forall n \geq 1$ und $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$.

Dann folgt aus der Stetigkeit von f in x_0 (Korollar IV.5), dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) = y_0$ und da f injektiv ist, folgt $f(a_n) \neq y_0$ $\forall n \geq 1$, woraus folgt, dass y_0 ein Häufungspunkt von E ist.

Sei nun (Satz IV.4) $\varphi : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig mit

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \quad \varphi(x_0) = f'(x_0)$$

Wir ersetzen $x = f^{-1}(y)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$, insbesondere $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ und erhalten:

$$y - y_0 = \varphi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)).$$

Da $\varphi \circ f^{-1}$ in y_0 stetig ist, ~~gibt es~~ ~~[illegible]~~ und $\varphi(f^{-1}(y_0)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$

gibt es $\delta > 0$ so dass:

$\forall\, y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap E : \varphi \circ f^{-1}(y) \neq 0$.

Also folgt für dieselben y's:

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}\,(y - y_0).$$

Nach Korollar III. 8. (2) ist $\dfrac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$, definiert auf $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap E$, stetig in y_0. Nach Satz IV. 4 ist also f^{-1} differenzierbar in y_0 und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

$\boxed{\xi}$

Beispiele IV. 12

(1) Die Ableitung von $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

ist $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\ln(\exp(x)) = x .$$

Wir wenden Satz IV.10 auf $f(x) = \exp(x)$

und $g(y) = \ln y$ und erhalten durch

Ableiten:

$$\ln'(\exp(x))\,\exp'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da nach IV.7(1) $\exp'(x) = \exp(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$

folgt $\ln'(\exp(x))\,\exp(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

und da $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ bijektiv ist folgt $\forall y \in]0, \infty[: \ln'(y) \cdot y = 1$.

(2) Sei $a \in \mathbb{R}$; die Ableitung der Funktion

$$\begin{aligned}]0, \infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^a \end{aligned}$$

ist $a x^{a-1}$.

Per Definition: $x^a = \exp(a \ln x)$, $x > 0$.

Wir wenden Satz IV.10 an auf

$f(x) = a \ln x$, $g(y) = \exp(y)$ und

erhalten mit $g'(y) = \exp(y)$ und

$f'(x) = a \cdot \frac{1}{x}$,

$$(x^a)' = \exp'(a \ln x) \frac{a}{x}$$

$$= \exp(a \ln x) \frac{a}{x}$$

$$= x^a \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

(3) (Vergleiche mit Korollar IV.11)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv in $\mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$

differenzierbar.

Aber f^{-1} ist in 0 nicht differenzierbar.

IV. 2. Zentrale Sätze über die (erste) Ableitung.

Informationen über die erste Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion, wie z.B. Vorzeichen, Nullstellen, erlauben über das Qualitative Verhalten der Funktion f recht präzise Schlüsse zu ziehen.

Begriff wie monoton steigend und fallend haben wir in 3.1 eingeführt. Dazu kommen noch:

Def. IV.13: Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$.

(1) ~~x_0 ist~~ f besitzt ein lokales Maximum ~~in~~ ~~x_0~~ in x_0

falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$$

(2) f besitzt ein lokales Minimum in x_0 ~~x~~ f falls es

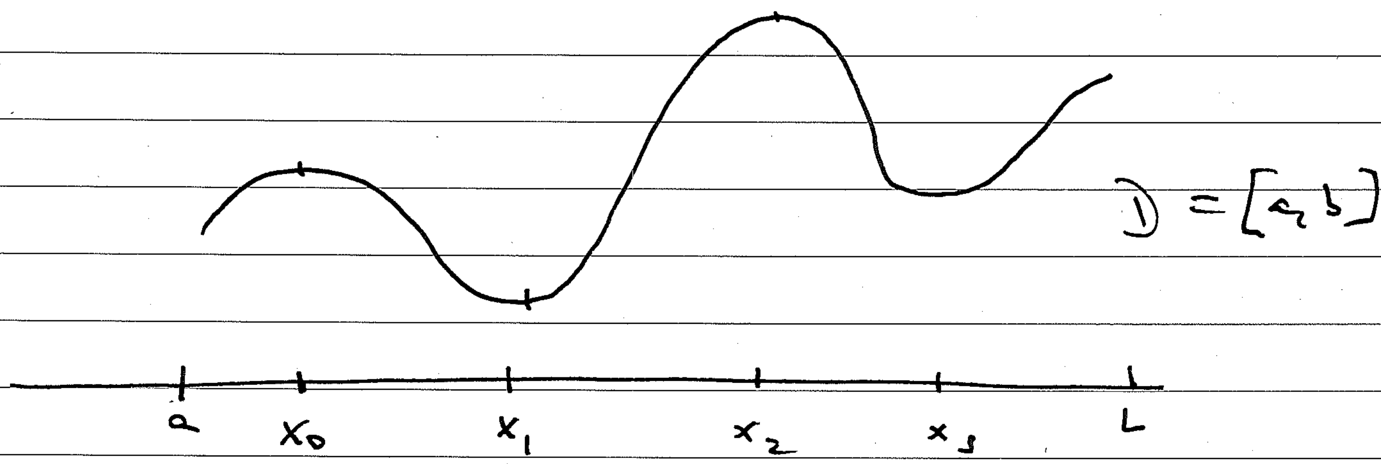
$\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D.$$

(3) f besitzt ein lokales Extremum in x_0 ~~x~~ f falls

es entweder ein lokales Minimum oder

Maximum von f ist.



x_0, x_2 sind lokale Maxima und x_1, x_3

sind lokale Minima.

Satz IV. 14. Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$.

Wir nehmen an, f ist in x_0 differenzierbar.

(1) Falls $f'(x_0) > 0$ gibt es $\delta > 0$

mit $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0+\delta[$

$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0[$

(2) Falls $f'(x_0) < 0$ gibt es $\delta > 0$

mit $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0+\delta[$

$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0[$.

(3) Falls ~~ein~~ x_0 ein lokales extremum von f ist, folgt $f'(x_0) = 0$.

Beweis: (1) Sei $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x-x_0)$

wobei $\varphi :]a,b[$ stetig in x_0 ist und

~~x_0 ...~~ $\varphi(x_0) = f'(x_0) > 0$.

Da φ in x_0 stetig ist und $\varphi(x_0) > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $\varphi(x) > 0$ $\forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Dann folgt für $x \in \,]x_0, x_0 + \delta[$:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\varphi(x)}_{>0} \underbrace{(x - x_0)}_{>0} > f(x_0)$$

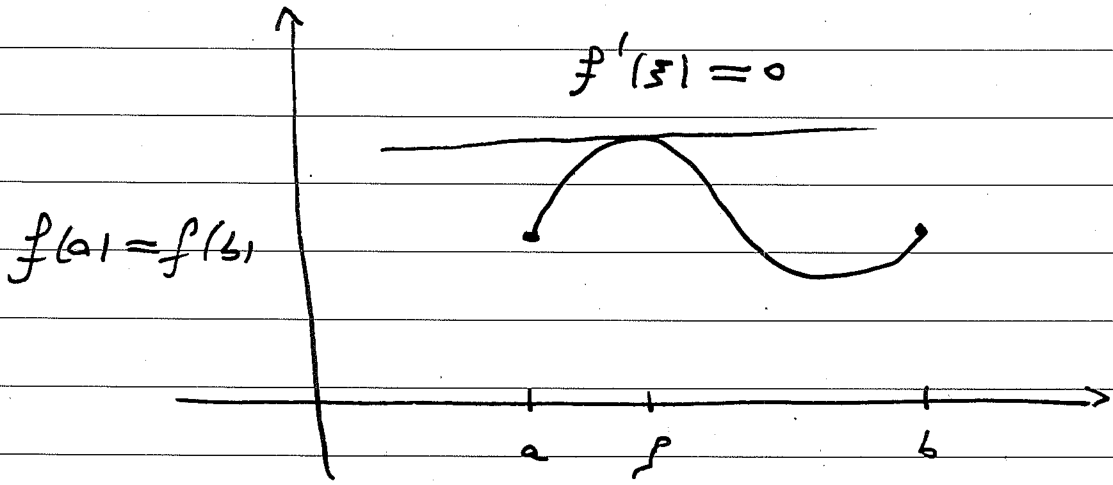
und für $x \in \,]x_0 - \delta, x_0[$:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\varphi(x)}_{>0} \underbrace{(x - x_0)}_{<0} < f(x_0).$$

(2) Beweis Analog; alternativ kann man (1) auf $-f$ anwenden.

(3) Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt dann kann wegen (1) und (2) weder $f'(x_0) > 0$ noch $f'(x_0) < 0$ gelten, also folgt $f'(x_0) = 0$. $\boxed{\beta}$

Der nächste Satz lässt sich bildlich wie folgt darstellen:



<u>Satz IV.15</u> (Rolle 1690) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi\in\,]a,b[$ mit

$$f'(\xi)=0.$$

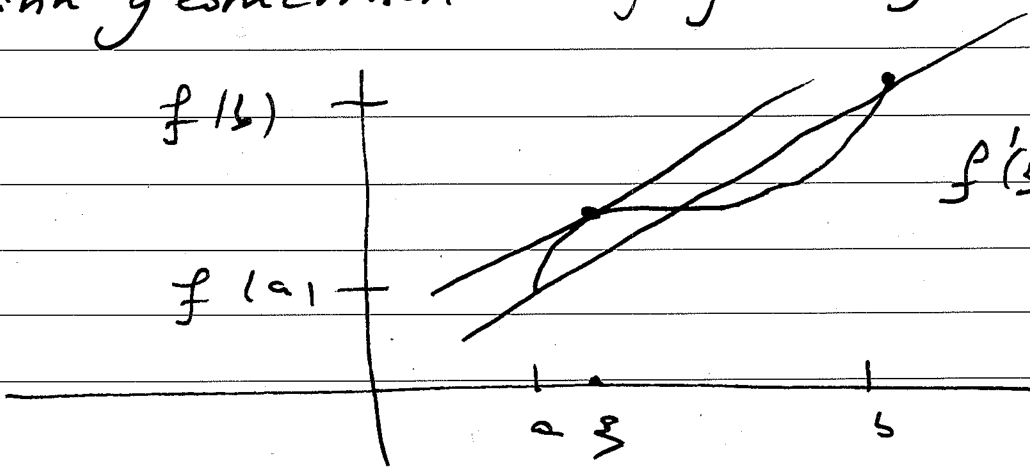
<u>Beweis</u>: Aus dem Min-Max Theorem folgt, dass es u,v in $[a,b]$ gibt mit

$$f(u)\le f(x)\le f(v).$$

Falls eines der beiden u, v in $]a,b[$ liegt, nennen wir ihn ξ, so hat f in ξ ein lokales Extremum und dann folgt aus Satz IV.14(3) $f'(\xi)=0$ und der Satz ist bewiesen.

Falls $\{u,v\} \subset \{a,b\}$ folgt $f(u)=f(v)$ und somit ist f constant; insbesondere folgt $f'(\xi)=0 \quad \forall \xi \in]a,b[$. $\square$

Der folgende Satz ist eine naheliegende Verallgemeinerung des Satzes von Rolle und kann geometrisch wie folgt dargestellt werden:



$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Satz II.16 (Lagrange 1797) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

stetig mit f auf $]a,b[$ differenzierbar.

Dann gibt es $\xi \in]a,b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Beweis:

Sei $g(x) = (x-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) + f(a)$

die Gleichung der Geraden durch $(a, f(a))$

und $(b, f(b))$. Dann ist klar, dass

$h(x) = f(x) - g(x)$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle

erfüllen. Es gibt also $\xi \in]a,b[$ mit

$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi)$.

Da $g'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\forall x \in]a,b[$ folgt der Satz.

$\boxed{\xi}$

Das folgende Korollar beschreibt, wie angekündigt, das Qualitative Verhalten von f mittels der Vorzeichens von f'.

Korollar IV 17. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar.

1.) Falls $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in]a,b[$ ist f constant.

2.) Falls $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in]a,b[$ gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$.

3.) Falls $f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in]a,b[$ ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend.

4.) Falls $f'(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in]a,b[$ ist f auf $[a,b]$ strikt monoton wachsend.

5.) Falls $f'(\xi) \leq 0 \; \forall \xi \in \,]a,b[$ ist f monoton fallend auf $[a,b]$.

6.) Falls $f'(\xi) < 0 \; \forall \xi \in \,]a,b[$ ist f strikt monoton fallend auf $[a,b]$.

7.) Falls es $M \geq 0$ gibt mit:

$|f'(\xi)| \leq M \; \forall \xi \in \,]a,b[$ dann folgt

$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|.$$

Beweis:

(1) Wende den Satz von Lagrange auf f das Intervall $[a,x]$ wobei $a < x \leq b$.

Dann gibt es $\xi \in \,]a,x[$ mit:

$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) = 0$. Woraus $f(x) = f(a)$ für alle $x \in \,]a,b]$ folgt.

(2) Folgt aus (1) angewandt auf

$f - g$.

(3) und (4) Seien $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Der

Satz von Lagrange angewandt auf $[x_1, x_2]$

liefert ein $\xi \in]x_1, x_2[$ mit:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Wobei im Fall $f'(\xi) \geq 0$, $f(x_2) \geq f(x_1)$

folgt und im Fall $f'(\xi) > 0$, $f(x_2) > f(x_1)$.

(5) und (6) folgen aus (3) und (4) angewandt

auf $-f$.

(7) Seien $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ und

$\xi \in]x_1, x_2[$ mit $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Dann folgt $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M |x_2 - x_1|$. ∎