Beispiele IV.17 (trigonometrische Funktionen).

(1) arcsin: da $\sin' = \cos$ (IV.8.(2))

und $\cos(x) > 0 \quad \forall x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ (III.46.(6))

folgt aus Korollar IV.17 (4), dass die

Sinusfunktion auf $[-\pi/2, \pi/2]$ strikt monoton

wachsend ist, also ist:

$$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$$

bijektiv. Wir definieren

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

als die Umkehrfunktion von sin. Nach

Korollar IV.14 ist sie auf $]-1, 1[$

differenzierbar und für $y = \sin x$,

$x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ folgt nach IV.14:

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

Nun benützen wir:

$$y^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2(x)$$

woraus mit $\cos(x) > 0$ folgt:

$$\cos(x) = \sqrt{1 - y^2}$$

Wir erhalten also $\forall y \in]-1,1[$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(2) <u>arccos</u>: eine analoge Diskussion wie in (1) zeigt, dass $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ strikt monoton fallend ist, und $[0,\pi]$ auf $[-1,1]$ bijektiv abbildet. Sei:

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

die Umkehrfunktion. Sie ist auf $]-1,1[$ differenzierbar und:

$$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in]-1,1[.$$

(3) <u>arctan</u>: für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\cdot\mathbb{Z}$ hatten wir die Tangensfunktion definiert: (siehe II.10)

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

und (IV.10 (21)) deren Ableitung berechnet:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Also ist tan auf $]-\pi/2, \pi/2[$ streng monoton wachsend mit

$$\lim_{x\to \pi/2 - 0} \tan(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\pi/2+0} \tan(x) = -\infty.$$

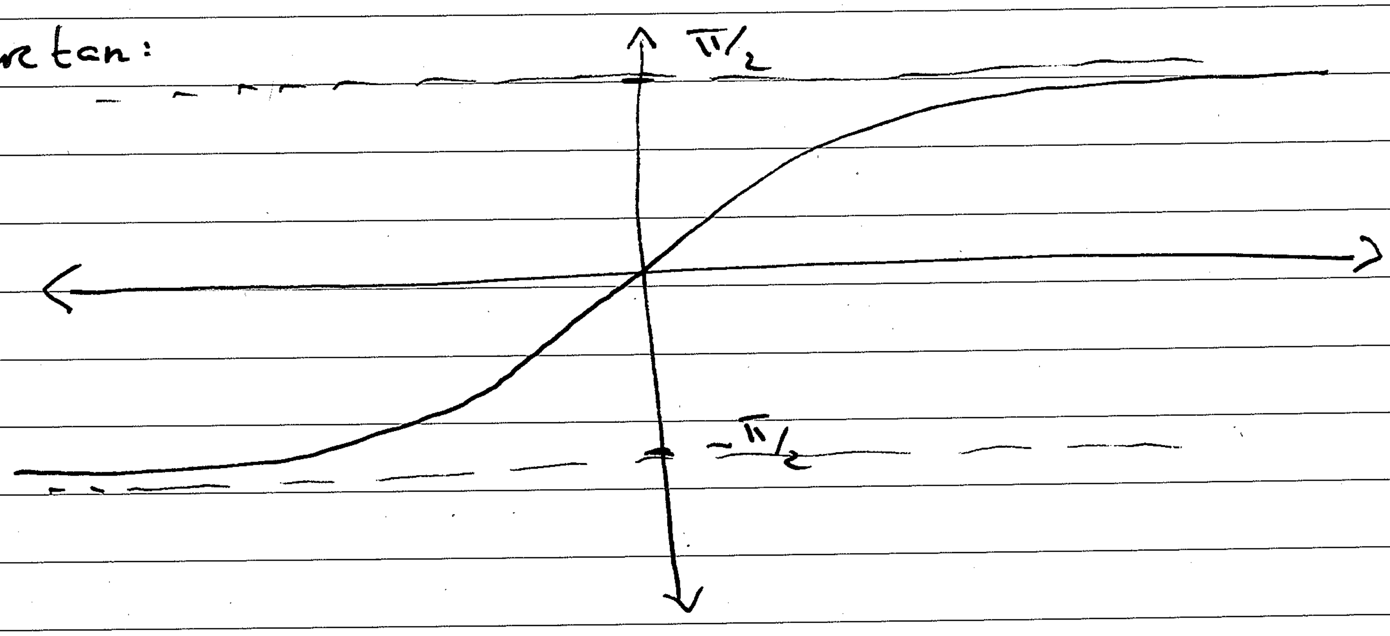
Also ist $\tan:]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow]-\infty, \infty[$ bijektiv. Sei $\arctan:]-\infty, \infty[\to]-\pi/2, \pi/2[$

die Umkehrfunktion. Dann ist arctan differenzierbar und: für $y = \tan(x)$

$$\arctan'(y) = \cos^2 x$$

$$= \frac{1}{1+y^2}$$

arctan:



(4) <u>arccotan</u>: für $x \notin \pi \cdot \mathbb{Z}$ hatten wir die Cotangensfunktion definiert:

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

und in IV. 10. (3) deren Ableitung berechnet:

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Die Cotangensfunktion ist auf $(0,\pi)$ streng monoton fallend und bildet $(0,\pi)$ bijektiv auf $(-\infty,\infty)$ ab. Sei:

$$\operatorname{arccot} : (-\infty,\infty) \longrightarrow (0,\pi)$$

die Umkehrfunktion. Dann folgt:

$$\operatorname{arccot}'(y) = -\frac{1}{1+y^2}, \quad y \in (-\infty,\infty).$$

<u>Beispiel IV. 18</u> (Hyperbel und Areafunktionen).

Als Hyperbelfunktionen bezeichnet man die Funktionen $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\tanh(x)$ definiert $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}.$$

Es gilt offensichtlich:

$$\cosh'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

$$\sinh'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Offensichtlich gilt $\cosh(x) \geq 1$,

$\sinh(x) > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$, $\sinh(0) = 0$.

Woraus folgt: $\cosh$ ist auf $[0, \infty)$

strikt monoton wachsend mit $\cosh(0) = 1$

und $\lim_{x \to +\infty} \cosh(x) = +\infty$. Also ist

$$\cosh : [0, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$$

bijektiv. Deren Umkehrfunktion wird

mit $\operatorname{arcosh}: [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$

bezeichnet.

Unter benützung von:

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

folgt: $$\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \quad \forall y \in]1, +\infty[$$

Analog zeigt man, dass:

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

streng monoton wachsend und bijektiv ist. Dessen Umkehrfunktion wird mit

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

bezeichnet und es gilt:

$$\operatorname{arcsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Für $\tanh(x)$ folgt:

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} > 0.$$

Also ist tanh auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und man sagt, dass

$$\lim_{x \to +\infty} \tan(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tan(x) = -1.$$

Die Funktion $\tanh: \mathbb{R} \to]-1, 1[$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion wird mit $\operatorname{artan}:]-1, 1[\to \mathbb{R}$ bezeichnet.

Es gilt dann:

$$\operatorname{artan}'(y) = \frac{1}{1-y^2} \quad \forall y \in]-1, 1[.$$